Foglio 4

25 ottobre 2012

Esercizio 1 (Punti 6)**.** Si consideri il seguente sottoinsieme di $M_2(\mathbb{C})$:

$$W = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & 0 \end{bmatrix} |a, b, c \in \mathbb{C},\ b + c = 0 \right\}$$

Verificare che W è un sottospazio di $M_2(\mathbb{C})$ e trovarne una base.

Esercizio 2 (Punti 6)**.** Si consideri l'insieme di vettori in $\mathbb{C}^4$

$$W = \{[0\ \ 1\ \ 0\ \ 1]^T, [-1\ \ 4\ \ 3\ \ 2]^T, [-3\ \ 7\ \ 9\ \ 1]^T, [-1\ \ 2\ \ 3\ \ 0]^T\}$$

1. Dimostrare che è linearmente dipendente.
2. Estrarre da essi un insieme linearmente indipendente e completarlo ad una base di $\mathbb{C}^4$.

Esercizio 3 (Punti 4)**.** Verificare che il sottoinsieme di $\mathbb{R}^3$

$$W = \left\{ [x_1\ \ x_2\ \ x_3]^T \in \mathbb{R}^3 | \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - 2x_3 = 0 \end{cases} \right\}$$

è un sottospazio di $\mathbb{R}^3$. $v = [-3\ \ -3\ \ 2]^T$ sta in W? (Giustificare la risposta).

Esercizio 4 (Punti 8)**.** Si considerino i sottoinsiemi U e V di $\mathbb{R}^3$

$$U = \left\{ [x_1\ \ x_2\ \ x_3]^T \in \mathbb{R}^3 | \begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \right\} \quad \text{e} \quad V = \left\{ [x_1\ \ x_2\ \ x_3]^T \in \mathbb{R}^3 | \begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \end{cases} \right\}$$

1. Verificare che sia U che V sono sottospazi di $\mathbb{R}^3$.
2. Determinarne la dimensione e una base di U e V.
3. Determinare la dimensione e una base dell'intersezione $U \cap V$.

Esercizio 5 (Punti 6)**.** ☻Sia V l' $\mathbb{R}$-spazio vettoriale delle matrici $n \times n$.

1. Dimostrare che l'insieme S delle matrici simmetriche $n \times n$ è un sottospazio di V di dimensione $\frac{n(n+1)}{2}$.
2. Trovare un sottospazio T di V tale che $V = T \oplus S$. Determinare una base e la dimensione di T.

N.B.
Il simbolo ☻ denota esercizi giudicati **difficile**.