Università degli Studi di Verona Anno Accademico 2016-2017
CL in Matematica Applicata
Algebra

Foglio di Esercizi n°3 - 26/10/2016

(Da consegnare il giorno 2/11/2016)

Esercizio 1

Sia $M_2(\mathbb{Q})$ l'anello delle matrici 2×2 ad elementi nel campo $\mathbb{Q}$ dei numeri razionali.

1) (*3 punti*) Dimostrare che l'insieme $S = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Q} \right\}$ è un sottoanello commutativo di $M_2(\mathbb{Q})$.

2) (*4 punti*) Sia $I = \{A \in S \mid A^2 = 0\}$. Dimostrare che I è un ideale di S.

3) (*4 punti*) Dimostrare che $S/I \cong \mathbb{Q}$.

Esercizio 2

Sia R un anello (non necessariamente commutativo).

1) (*2 punti*) Siano $a, b, c, d \in R$. Calcolare $(a + b)(c + d)$.

2) (*2 punti*) Siano $a, b \in R$. Calcolare $(a + b)^2$.

Supponiamo che per ogni $r \in R$ si abbia $r^2 = r$.

3) (*2 punti*) Dimostrare che per ogni $r \in R$ si ha $-r = r$.

4) (*2 punti*) Dedurre che R è commutativo.

Esercizio 3

Siano R un anello e $\mathrm{End}(R)$ l'anello degli endomorfismi del gruppo abeliano $(R, +)$. Per ogni $r \in R$ sia $\varphi_r : R \to R$ l'applicazione definita da $\varphi_r(x) = rx$ per ogni $x \in R$.

1) (*3 punti*) Dimostrare che l'applicazione $\varphi : R \to \mathrm{End}(R)$, definita da $\varphi(r) = \varphi_r$ per ogni $r \in R$, è un omomorfismo iniettivo di anelli.

2) (*4 punti*) Dimostrare che φ è un isomorfismo di anelli se e solo se $f(x) = f(1_R)x$ per ogni $f \in \mathrm{End}(R)$ e per ogni $x \in R$.

3) (*4 punti*) Dimostrare che l'anello $\mathrm{End}(R)$ è commutativo se e solo se R è un anello commutativo ed $\mathrm{End}(R)$ è isomorfo a R.