EX 3 fila A Analisi Matematica II

1) Enunciare il teorema relativo alla formula di Gauss Green nel piano

2) Usando la formula di Gauss Green nel piano, calcolare l'area racchiusa dalla curva piana

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{25}=1$$

Ris

Sia D un dominio limitato piano e normale rispetto agli assi e sia $F(x,y)=P(x,y)\vec{i}+Q(x,y)\vec{j}$ un campo vettoriale di classe $C^1(D)$. Allora

$$\iint_D (Q_x-P_y)\,dx\,dy=\int_{\partial^+D} P\,dx+Q\,dy$$

ove ∂^+D è la frontiera orientata positivamente.

Scegliendo $P(x,y)=y \Rightarrow$ area $D=\iint_D dx\,dy=-\int_{\partial^+D} y\,dx$

$Q(x,y)=x \Rightarrow$ area $D=\iint_D dx\,dy=+\int_{\partial^+D} x\,dy$

sommando e dividendo per 2 area $D=\frac{1}{2}\int_{\partial^+D} x\,dy-y\,dx$.

Considero la rappresentazione parametrica dell'ellisse:

$$\begin{cases} x=2\cos\vartheta \\ y=5\sin\vartheta \end{cases} \quad \text{con } 0\le\vartheta<2\pi$$

$$\Rightarrow \text{area } D=\int_{\partial^+D} x\,dy=\int_0^{2\pi} 2\cos\vartheta\,(5\sin\vartheta)'\,d\vartheta=\int_0^{2\pi} 10\cos\vartheta\cos\vartheta\,d\vartheta=$$

$$=\int_0^{2\pi} 10\cos^2\vartheta\,d\vartheta=10\int_0^{2\pi}\frac{1+\cos 2\vartheta}{2}\,d\vartheta=10\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}+\frac{2\cos 2\vartheta}{4}\,d\vartheta=$$

$\cos 2\vartheta=2\cos^2\vartheta-1$

$\cos^2\vartheta=\frac{1+\cos 2\vartheta}{2}$

$$=10\left[\frac{1}{2}\vartheta\Big|_0^{2\pi}+\frac{1}{4}\sin 2\vartheta\Big|_0^{2\pi}\right]=10\left(\pi+\frac{1}{4}(\sin 4\pi-\sin 0)\right)=10\pi.$$