NOTE DI TOPOLOGIA ALGEBRICA

SANSONETTO NICOLA

1. Introduzione

In questa parte del corso ci dedicheremo allo studio della topologia algebrica, introducendo uno dei concetti più importanti della matematica moderna, il *gruppo fondamentale*. Una delle tecniche principali della topologia algebrica consiste nello studio di spazi topologici costruendo immagini algebriche di essi, che sono, in genere, "più semplici" da studiare. I meccanismi che generano queste immagini sono, usando un linguaggio moderno, dei *funtori* e hanno la caratteristica principale di formare immagini non solamente di spazi, ma anche di funzioni. Quindi le funzioni continue tra gli spazi topologici sono proiettate in omomorfismi tra le immagini algebriche dei relativi spazi tra cui sono definite. In definitiva abbiamo dei metodi per collegare spazi topologici a determinate strutture algebriche e le funzioni continue tra spazi topologici sono collegate a omomorfismi tra tali strutture algebriche. Se le immagini algebriche, cioè se i funtori sono abbastanza dettagliati è possibile ricostruire con accuratezza le "forme" degli spazi di partenza o quanto meno le loro caratteristiche peculiari.

Cominceremo ora lo studio del più semplice ma anche del più importante dei funtori della topologia algebrica, il **gruppo fondamentale** di uno spazio topologico (puntato). Tutti conosciamo il concetto di spazio semplicemente connesso. Il gruppo fondamentale, in un certo senso, misura quanto uno spazio non sia semplicemente connesso. Dalla definizione di gruppo fondamentale sarà chiaro che il gruppo fondamentale di uno spazio topologico X sarà un invariante topologico di X stesso, cioè, se due spazi topologici sono omeomorfi, allora essi avranno lo stesso gruppo fondamentale. Questo fatto ci permette di dire se due spazi sono non omeomorfi guardando al loro gruppo fondamentale, cioè due spazi saranno necessariamente non omeomorfi se i loro gruppi fondamentali non sono isomorfi. Come già accennato in precedenza, il gruppo fondamentale fornisce informazioni anche sulle mappe continue di uno spazio X in uno spazio Y, dal momento che ogni funzione continua di X in Y induce un omomorfismo tra i relativi gruppi fondamentali.

2. Introduzione alla teoria delle omotopie

Definizione. Siano X e Y spazi topologici e siano $f, g : X \longrightarrow Y$ funzioni continue. Una omotopia di f in g è una funzione continua $H : X \times I \longrightarrow Y$[1] tale che per ogni $x \in X$, $H(x, 0) = f(x)$ e $H(x, 1) = g(x)$. In tal caso si dice che f è omotopa a g e si scrive $f \sim g$.

Si può pensare ad un'omotopia come ad una famiglia ad un parametro di funzioni continue $H_\lambda(x)$, con $\lambda \in I$ tali che $H_0(x) = f(x)$ e $H_1(x) = g(x)$. *Intuitivamente* un'omotopia deforma con continuità la funzione f nella funzione g. **Attenzione** però, la deformazione è di tutta la funzione, non solamente del sostegno.

Più in generale, dal momento che la nozione di omotopia è legata agli spazi X e Y, è utile introdurre la nozione di omotopia relativamente ad un sottospazio A di X.

Definizione. Siano $f, g \in C(X, Y)$ e $A \subset X$. Si dice che f e g sono omotope relativamente ad A se esiste un'omotopia H di f in g tale che $H(x, \lambda) = f(x)$ per ogni $x \in A$ e ogni $\lambda \in I$.

Con questa definizione si vuole un'omotopia che fissi $f(x)$ per ogni $x \in A$. Se lo spazio X è compatto è utile l'omotopia tra funzioni relativamente alla frontiera ∂X di X. Questa nozione sarà centrale più avanti quando introdurremo il gruppo fondamentale di uno spazio topologico (puntato).

Esempio 1. Sia Y un sottoinsieme convesso di uno spazio vettoriale topologico. Allora ogni coppia di funzioni continue $f, g \in C(X, Y)$ è omotopa mediante l'omotopia

$$\begin{array}{rcl} H : X \times I & \longrightarrow & Y \\ (x, \lambda) & \longmapsto & H(x, \lambda) = (1 - \lambda) f(x) + \lambda g(x) \end{array}$$

Date: 30 gennaio 2011.

e-mail: nicola.sansonetto@gmail.com.

[1] In queste note denoteremo con I l'intervallo chiuso e limitato $[0, 1]$.

detta *omotopia affine*, dal momento che una funzione si deforma nell'altra lungo i segmenti che le uniscono.

Esempio 2. Siano $f, g \in C(X, Y)$ funzioni costanti, con $f(x) = a$ e $g(x) = b$, per ogni $x \in X$. Allora f e g sono omotope se e solo se a e b appartengono alla stessa arco–componente di Y.

Esempio 3. Le funzioni identità e antipodale di $\mathbb{S}^1$ in sè sono omotope e l'omotopia è la mappa

$$\begin{array}{rcl} H : \mathbb{S}^1 \times I & \longrightarrow & \mathbb{S}^1 \\ (z, \theta) & \longmapsto & H(z, \theta) = z\, e^{i\pi\theta} \end{array}$$

Possiamo cioè ruotare l'identità di un angolo piatto per sovrapporla all'antipodo.

Più in generale due rotazioni pensate come funzioni di $\mathbb{S}^1$ in sè (cioè due moltiplicazioni per $e^{i\theta}$, con $\theta \in \mathbb{R}$) sono omotope. Generalizzando ancora, se $A \in \mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ le funzioni $\mathbb{S}^{n-1} \ni x \longmapsto x \in \mathbb{S}^{n-1}$ e l'identità di $\mathbb{S}^{n-1}$ sono omotope come funzioni di $\mathbb{S}^{n-1}$ in sè. Se $\lambda \longmapsto A_\lambda$ è una curva continua su $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$, con $A_0 = \mathrm{id}$ e $A_1 = A$, l'omotopia è $(x, \lambda) \longmapsto A_\lambda(x)$.

Definizione. Una funzione continua $f \in C(X, Y)$ si dice *nullomotopa* se è omotopa ad una costante. Uno spazio topologico X è detto *contraibile* o contrattile se la funzione identità $\mathrm{id}_X : X \longrightarrow X$ è nullomotopa.

Esempio 4. *Ogni spazio contraibile è connesso per archi.* Infatti sappiamo che due funzioni costanti sono omotope se e solo se le loro immagini stanno nella stessa arco–componente.

Esempio 5. $\mathbb{R}^n$ *è contraibile.* Infatti sia $\mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}$ l'identità di $\mathbb{R}^n$ e $g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ la funzione nulla. Un'omotopia di $\mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}$ in g è $H : \mathbb{R}^n \times I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ tale che $H(x, \lambda) = (1 - \lambda)s$. (Si ricordi che $\mathbb{R}^n$ è convesso e quindi possiamo usare l'omotopia affine).

Esercizio 1. Mostrare che il disco 2-dimensionale D^2 è contraibile.

Esercizio 2. Siano $a, b, c \in \mathbb{R}^*$. Lo spazio $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 |\, ax + by + c = 0\}$ è contraibile? Perché?

Proposizione 1. L'omotopia definisce una relazione di equivalenza sull'insieme delle funzioni continue tra due spazi topologici X e Y.

Dimostrazione. RIflessività. Ogni funzione f è omotopa a sè stessa, e l'omotopia è $H(x, \lambda) = f(x)$.
Simmetria. Sia $f \sim g$ e sia $H(x, \lambda)$ l'omotopia di f in g, allora $H(x, 1 - \lambda)$ è omotopia di g in f.
Transitività. Sia H omotopia di f in g e K omotopia di g in h, allora $H.K : X \times I \longrightarrow Y$ definita da

$$H.K(x, \lambda) = \begin{cases} H(x, 2\lambda), & \text{se } \lambda \in [0, 1/2] \\ K(x, 2\lambda - 1), & \text{se } \lambda \in [1/2, 1] \end{cases}$$

è omotopia di f in h. Osserviamo inoltre che la definizione di $H.K$ è ben posta, infatti $H, K(x, 1/2) = g(x)$. □

Osserviamo che la continuità dell'omotopia della proprietà transitiva non è affatto banale, ma discende dal seguente lemma.

Lemma 2 (dell'incollamento). Sia $X = A \cup B$, con A e B sottospazi topologici chiusi di X, allora $f : X \longrightarrow Y$ è continua se e solo se lo sono lo sue restrizioni $f|_A$ e $f|_B$

Dimostrazione. Un'implicazione è semplice, le restrizioni di funzioni continue sono continue. Dimostriamo ora l'altra implicazione. Assumiamo che $f|_A$ e $f|_B$ siano continue. Sia C un chiuso di Y, allora, nella topologia relativa di A e B, rispettivamente $f|_A^{\leftarrow}(C) \cap A$ e $f|_B^{\leftarrow}(C) \cap B$ sono chiusi, essendo $f|_A$ e $f|_B$ continue. Ora $f|_A^{\leftarrow}(C) \cap A$ e $f|_B^{\leftarrow}(C) \cap B$ sono in realtà chiusi in X, essendo A e B chiusi di X, quindi

$$f^{\leftarrow}(C) = \big(f|_A^{\leftarrow}(C) \cap A\big) \cup \big(f|_B^{\leftarrow}(C) \cap B\big)$$

è unione di due chiusi di X e quindi è chiuso e quindi f è continua. □

Il lemma dell'incollamento e la sua generalizzazione a ricoprimenti finiti e chiusi verrà frequentemente usato in quanto segue.

Osserviamo ora cosa significa che l'omotopia definisce una relazione di equivalenza in $C(X, Y)$. L'insieme delle funzioni continue di X in Y viene partizionato in classi di equivalenza dette *classi di omotopia.* L'insieme delle classi di omotopia si indica con $[X, Y]$. Notiamo infine che anche l'omotopia relativamente ad un sottospazio definisce una relazione di equivalenza in $C(X, Y)$.

Proposizione 3. Se $f_0 f_1 \in C(X,Y)$ sono omotope e $g_0, g_1 C(X,Y)$ sono omotope, allora $g_0 \circ f_0 \sim g_1 \circ f_1$ in $C(X,Y)$, cioè l'omotopia tra funzioni si comporta bene rispetto alla composizione di funzioni.

Dimostrazione. Per esercizio. □

Definizione. Una funzione continua $f : X \longrightarrow Y$ è detta un'*equivalenza omotopica* se esiste una funzione continua $g : Y \longrightarrow X$ tale che $[f] \circ [g] = [\mathrm{id}_Y]$ e $[g] \circ [f] = [\mathrm{id}_X]$. In tal caso si dice che X e Y sono *omotopicamente equivalenti* o che X e Y hanno lo stesso *tipo di omotopia.*

Teorema 4. Uno spazio topologico omotopicamente equivalente ad un punto è contraibile.

Gli spazi contraibili sono anche detti omotopicamente banali, infatti:

- se Y è contraibile allora $[X,Y]$ contiene un unico elemento, una volta fissato X. Cioè due funzioni che "arrivano" in uno spazio contraibile sono sempre omotope;
- se X è contraibile allora esiste una biiezione naturale tra $[X,Y]$ e le arco–componenti di Y.

Dimostrazione. Se X è contraibile allora ogni funzione $f : X \longrightarrow \{*\}$, in cui $\{*\}$ denota lo spazio con un unico elemento, è un'equivalenza omotopica. Sia, infatti, $g : \{*\} \longrightarrow X$, $g(x) = c$, allora $(g \circ f)(x) = c$ che è omotopa a id_X, essendo il codominio di $g \circ f$ uno spazio contraibile. L'altra composizione è triviale. Viceversa ogni omotopia di id_X in $g \circ f$ assicura che X è contraibile. □

Osservazione. L'esposizione fin qui seguita potrebbe essere fatto seguendo il linguaggio più astratto e generale delle categorie. La Proposizione 3 afferma che è possibile considerare una categoria $\mathcal{HTOP}$ che ha come oggetti gli spazi topologici e come morfismi tra di essi le classi di omotopia (ossia le classi di equivalenza delle funzioni continue modulo omotopia): $\mathrm{Mor}(X,Y) := [X,Y]$. Se definiamo $[g][f] = [g \circ f]$, la Proposizione 3 assicura che questa è una buona definizione. Il morfismo identico di X è la classe di omotopia dell'identità id_X di X. Gli isomorfismi di tale categoria sono le *equivalenze omotopiche* e le classi di isomorfismo sono i *tipi di omotopia.* (Due spazi isomorfi in $\mathcal{HTOP}$ si dicono omotopicamente equivalenti.) Osserviamo che in questa terminologia si ritrovano le definizioni già date, infatti $[f] \in [X,Y]$ è un'equivalenza omotopica se esiste $g \in [Y,X]$ tale che $[g][f] = [\mathrm{id}_X]$ e $[f][g] = [\mathrm{id}_Y]$.

3. Il gruppo fondamentale

Un cammino da x_0 a x_1 in uno spazio topologico X è una funzione continua $\alpha : [0,1] \longrightarrow X$ tale che $\alpha(0) = x_0$ e $\alpha(1) = x_1$. Introdurremo ora uno dei concetti base per poter poi definire il gruppo fondamentale. Due cammini α e β da x_0 a x_1 sono equivalenti se tra di essi vi è un'omotopia ad estremi fissi o meglio se sono omotopi relativamente a $\{0,1\}$. Più in dettaglio α e β sono equivalenti se esiste un'omotopia $H : I \times I \longrightarrow X$ tale che $H(x,0) = \alpha(x)$, $H(x,1) = \beta(x)$ e $H(0,\lambda) = x_0$, $H(1,\lambda) = x_1$. Indichiamo con $[\alpha]$ la classe di omotopia di α relativamente a $\{0,1\}$. D'ora in poi ci occuperemo prevalentemente di omotopie ad estremi fissi o di proprietà invarianti per tali omotopie, sottointenderemo quindi il fatto che l'omotopia è relativa tranne che nei casi in cui è opportuno indicare le differenze. Ciò che vogliamo considerare sono le possibili deformazioni di un cammino tra due punti fissati e stiamo considerando come equivalenti quelli che sono deformabili con continuità l'uno nell'altro.

Esempio 6. Consideriamo due cammini $\alpha, \beta : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$, che partano da x_0 e arrivino in x_1. Essi sono omotopi (relativamente a ∂I) mediante l'omotopia affine:

$$H(x,t) = H_t(x) = (1-t)\alpha(x) + t\beta(x)$$

L'omotopia scritta mostra, in maniera più generale, che in un sottoinsieme convesso di $\mathbb{R}^n$ tutti i cammini di estremi x_0 e x_1 sono equivalenti.

Mostriamo ora che le classi di omotopia dei cammini ad estremi fissi sono invarianti per funzioni continue che lasciano fissi gli estremi, cioè che le riparametrizzazioni ad estremi fissi di un cammino non alterano la classe del cammino.

Proposizione 5. Sia $p : I \longrightarrow I$ una funzione continua tale che $p(0) = 0$ e $p(1) = 1$. Allora per ogni $\alpha \in C(I,X)$, $[\alpha] = [\alpha \circ p]$.

Dimostrazione. Poniamo $H(s,\lambda) = \alpha\big((1-\lambda)s + \lambda p(s)\big)$ per ogni $(s,\lambda) \in I \times I$. H è un'omotopia ad estremi fissi di α in $\alpha \circ p$. □

Dati due cammini $\alpha, \beta \in C(I, X)$, tali che $\alpha(1) = \beta(0)$, si può definire il cammino prodotto $\alpha.\beta$, che in genere si legge β dopo α:

$$\alpha.\beta(s) := \begin{cases} \alpha(2s), & \text{se } s \in [0, 1/2] \\ \\ \beta(2s-1), & \text{se } s \in [1/2, 1] \end{cases}$$

Tale prodotto è definito prendendo la funzione $\gamma : [0, 2] \longrightarrow X$ tale che $\gamma(s) = \alpha(s)$ per $s \in [0, 1]$ e $\gamma(s) = \beta(s)$ per $s \in [1, 2]$ e poi si riparametrizza γ sull'intervallo $[0, 1]$. Tale prodotto non è certamente associativo (perché?), tuttavia è compatibile con l'omotopia ad estremi fissi, cioè se $[\alpha_0] = [\alpha_1]$ e $[\beta_0] = [\beta_1]$, con $\alpha_0(1) = \beta_0(0)$ e $\alpha_1(1) = \beta_1(0)$, allora $[\alpha_0.\beta_0] = [\alpha_1.\beta_1]$. Allora ha senso definire il prodotto tra classi di omotopia ad estremi fissi:

$$[\alpha][\beta] := [\alpha.\beta] \tag{1}$$

ASSOCIATIVITÀ. Il prodotto tra classi di omotopia ad estremi fissi di cammini è associativo.

Dimostrazione. Siano α, β, γ cammini in X, tale che $\alpha(1) = \beta(0)$ e $\beta(1) = \gamma(0)$. Mostriamo che $[(\alpha.\beta).\gamma] = [\alpha.(\beta.\gamma)]$. Per far ciò usiamo il risultato della Proposizione 5, mostriamo cioè che $(\alpha.\beta).\gamma$ una volta riparametrizzato dà $\alpha.(\beta.\gamma)$. Consideriamo l'omeomorfismo affine a tratti $p : I \longrightarrow I$ che manda $[0, 1/2]$ su $[0, 1/4]$, $[1/2, 3/4]$ su $[1/4, 1/2]$ e $[3/4, 1]$ su $[1/2, 1]$, definito da

$$p(s) = \begin{cases} \dfrac{s}{2}, & \text{per } s \in [0, 1/2] \\ \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{2}\left(s - \dfrac{1}{2}\right), & \text{per } t \in [1/2, 3/4] \\ \dfrac{t}{2} + 2\left(s - \dfrac{3}{4}\right), & \text{per } t \in [3/4, 1] \end{cases}$$

La figura **??** fornisce un'interpretazione pittorica della riparametrizzazione. Si osservi che quindi $(\alpha.\beta).\gamma \circ p = \alpha.(\beta.\gamma)$ e quindi per la Proposizione 5 $[(\alpha.\beta).\gamma] = [\alpha.(\beta.\gamma)]$. □

Mostriamo ora che la classe dei cammini costanti svolge il ruolo di elemento neutro per il prodotto (1). Per ogni $c \in X$, indichiamo con $\epsilon_c : I \longrightarrow X$ il cammino costante c, $\epsilon_c(s) = c$ per ogni $s \in I$.

ESISTENZA ELEMENTO NEUTRO. Sia α un cammino di origine x_0 ed estremo x_1. Si ha $[\epsilon_c][\alpha] = [\alpha] = [\alpha][\epsilon_c]$.

Dimostrazione. Consideriamo la riparametrizzazione $p : I \longrightarrow I$ definita da

$$p(s) = \begin{cases} 0, & \text{per } s \in [0, 1/2] \\ 2s - 1 & \text{per } s \in [1/2, 1] \end{cases}$$

allora $\alpha \circ p = \epsilon_{x_0}.\alpha$ e quindi $[\alpha] = [\epsilon_{x_0}.\alpha]$ (vedi figura **??**).
Analogamente, consideriamo la riparametrizzazione $q : I \longrightarrow I$, definita da

$$q(s) = \begin{cases} 2s, & \text{per } s \in [0, 1/2] \\ 1, & \text{per } s \in [1/2, 1] \end{cases}$$

allora $\alpha \circ q = \alpha.\epsilon_{x_1}$ e quindi $[\alpha] = [\alpha.epsilon_{x_1}]$ (vedi figura **??**). □

Infine mostriamo che se $\alpha \in C(I, X)$ è cammino di origine x_0 ed estremo x_1, la classe di omotopia del cammino inverso $\overline{\alpha} : I \longrightarrow X$ $\overline{\alpha}(s) := \alpha(1 - s)$ gioca il ruolo di inverso.

ESISTENZA INVERSO. Si ha che $[\alpha][\overline{\alpha}] = [\epsilon_{x_0}]$ e $[\overline{\alpha}][\alpha] = [\epsilon_{x_1}]$.

Dimostrazione. Notiamo che $\alpha.\overline{\alpha}(s) = \alpha(2s)$ per $e \in [0, 1/2]$ e $\alpha.\overline{\alpha}(s) = \overline{\alpha}(s)$ per $s \in [1/2, 1]$. Sia quindi $q : I \longrightarrow I$ la riparametrizzazione affine a tratti tale che $q(0) = 0$, $q(1) = 1$ e $q(1/2) = 1$:

$$q(s) = \begin{cases} 2s, & \text{per } s \in [0, 1/2] \\ 2(1 - 2s), & \text{per } s \in [1/2, 1] \end{cases}$$

allora $\alpha \circ q = \alpha.\overline{\alpha}$ (vedi figura **??**). Ora l'omotopia $H(s, \lambda) = \alpha((1 - \lambda)q(s))$ è omotopia di $\alpha.\overline{\alpha}$ in ϵ_{x_0}. Si procede in modo analogo per dimostrare che $[\overline{\alpha}.\alpha] = [\epsilon_{x_1}]$.

$\square$

Nell'insieme delle classi di omotopia ad estremi fissi di cammini abbiamo introdotto un prodotto dotato di "buone proprietà", tuttavia non siamo ancora in grado di dotare tale insieme di una qualche struttura algebrica.[2] Tuttavia se invece di guardare all'insieme delle classi di omotopia ad estremi fissi di cammini consideriamo l'insieme delle classi di omotopia ad estremi fissi di circuiti basati ad un punto le cose cambiano. Diciamo *circuito* un cammino che parte e termina nello stesso punto x_0. Il punto x_0 a cui il circuito è basato è detto *punto base*. Denotiamo con $\pi_1(X, x_0)$ l'insieme delle classi di omotopia ad estremi fissi di circuiti basati a x_0, definiti nello spazio topologico puntato (X, x_0). Per spazio topologico puntato intendiamo uno spazio topologico in cui è messo in evidenza un punto.

Teorema 6. L'insieme $\pi_1(X, x_0)$ dotato del prodotto (1) è un gruppo, detto *gruppo fondamentale* o primo gruppo di omotopia dello spazio puntato (X, x_0).

Esempio 7. Consideriamo uno spazio puntato (X, x_0) che sia sottoinsieme convesso di $\mathbb{R}^n$.[3] È semplice osservare che $\pi_1(X, x_0) = 1$ per ogni $x_0 \in X$, infatti l'omotopia affine $H_\lambda(s) = (1-\lambda)\alpha_0(s) + \lambda\alpha_1(x)$, con α_0 e α_1 circuiti basati a x_0, è un'omotopia di α_0 in α_1.

N.B. In generale è difficile mostrare che uno spazio puntato ha gruppo fondamentale, non banale, dal momento che si dovrebbe dimostrare la non esistenza di omotopie tra tutti i circuiti basati ad un dato punto.

Osservazione. Osserviamo che $\pi_1(X, x_0) = [S^1, X]$, cioè il gruppo fondamentale di uno spazio topologico puntato (X, x_0) può essere pensato come la famiglia delle classi di omotopia delle funzioni continue $\gamma : (S^1, 1) \longrightarrow (X, x_0)$, basate a x_0. Tale insieme, analogamente a quanto fatto sopra viene dotato di una struttura di gruppo. Tale interpretazione del gruppo fondamentale è particolarmente utile, poiché porge naturalmente una generalizzazione "topologica" del gruppo fondamentale di uno spazio puntato. Si possono infatti definire i gruppi di omotopia di ordine superiore $\pi_n(X, x_0)$ di uno spazio puntato (X, x_0), come la famiglia delle classi di omotopia delle funzioni continue $\gamma : (S^n, \underline{1}) \longrightarrow (X, x_0)$, in cui $\underline{1} = (1, 0, \ldots, 0)$, anch'essa dotata di una struttura di gruppo con un'operazione che generalizza il prodotto tra circuiti introdotto nel caso del gruppo fondamentale. Osserviamo che $\pi_0(X, x_0)$ non è in generale un gruppo, Per $n \geq 1$ i $\pi_n(X, x_0)$ sono tutti gruppi e per $n \geq 2$ sono tutti gruppi abeliani. Lo studio dei gruppi di omotopia è un settore ricco e fecondo della topologia algebrica, ancora pieno di questioni fondamentali ancora aperte, ad esempio non sono a tutt'oggi noti persino tutti i gruppi di omotopia della sfera. In questa parte del corso noi ci occuperemo solamente del gruppo fondamentale, lasciando i gruppi d'omotopia di ordine superiore alla curiosità di ciascuno (si veda ad esempio [H]) o a studi di ordine superiore.

Dipendenza dal punto base

È naturale chiedersi come dipende il gruppo fondamentale di uno spazio puntato (X, x_0) dal punto base x_0. È abbastanza ovvio che cambiando il punto base in $x_1 \neq x_0$ cambierà anche il gruppo fondamentale (infatti cambia lo spazio puntato!). Tuttavia possiamo sperare di trovare un qualche legame tra i de gruppi fondamentali $\pi_1(X, x_0)$ e $\pi_1(X, x_1)$, se, ad esempio, i due punti base appartengono alla stessa arco–componente di X, dopotutto, lo ambiente X è sempre lo stesso. Sia $\alpha :\longrightarrow X$ un cammino di estremi x_0 e x_1, con inverso $\overline{\alpha}(s) = \alpha(1-s)$, da x_1 a x_0. Ad ogni circuito γ basato a x_1 possiamo associare il circuito $\alpha.\gamma.\overline{\alpha}$ basato a x_0.

Proposizione 7. La funzione $h_{[\alpha]} : \pi_1(X, x_1) \longrightarrow \pi_1(X, x_0)$ definita da $h_{[\alpha]}[\gamma] = [\alpha.\gamma.\overline{\alpha}] = [\alpha][\gamma][\alpha]^{-1}$ è un isomorfismo di gruppi.

Dimostrazione. Se γ_λ un'omotopia di circuiti basati a x_1, $\alpha.gamma_\lambda.\overline{\alpha}$ è omotopia di circuiti basati a x_0 e quindi $h_{[\alpha]}$ è una funzione ben definita. In primo luogo osserviamo che $h_{[\alpha]}$ è un omomorfismo di gruppi, infatti $h_[\gamma.\delta] = [\alpha.\gamma.\delta.\overline{\alpha}] = [\alpha.\gamma.\overline{\alpha}.\alpha\delta.\overline{\alpha}] = [\alpha.\gamma.\overline{\alpha}][\alpha\delta.\overline{\alpha}] = h_{[\alpha]}[\gamma]\, h_{[\alpha]}[\delta]$. In secondo luogo osserviamo che $h_{[\alpha]}$ è in realtà un isomorfismo con inversa $h_{[\overline{\alpha}]}$, infatti $h_{[\alpha]}h_{[\overline{\alpha}]} = h_{[\alpha]}[\overline{\alpha}.\gamma.\alpha] = [\alpha.\overline{\alpha}.\gamma.\alpha.\overline{\alpha}] = [\gamma]$ e analogamente $h_{[\overline{\alpha}]}h_{[\alpha]}[\gamma] = [\gamma]$. $\square$

Quindi, se X è uno spazio connesso per archi, il gruppo fondamentale $\pi_1(X, x_0)$ dello spazio topologico X è unicamente individuato a meno di isomorfismi. Tuttavia bisogna fare attenzione, infatti ciò non significa che si possa propriamente parlare del gruppo fondamentale di uno spazio topologico connesso per archi, dal

[2] In realtà l'insieme delle classi di omotopia ad estremi fissi di cammini con un tale prodotto è dotato della struttura di gruppoide. In questo caso, per struttura algebrica si intende una struttura algebrica come quello di gruppo.

[3] Si ricordi che un tale spazio è contraibile.

momento che è individuata la classe di isomorfismo, mentre il gruppo è individuato a meno di isomorfismi tra loro coniugati.

Spazi con gruppo fondamentale banale

Definizione. Uno spazio topologico X si dice *semplicemente connesso* se è connesso per archi e ha gruppo fondamentale banale.

Proposizione 8. Uno spazio topologico X connesso per archi è semplicemente connesso se e solo se esiste un'unica classe di omotopia di cammini che collegano due punti di X.

Dimostrazione. La connessione per archi di X garantisce che per ogni coppia di punti di X esista un cammino che li collega. Assumiamo che $\pi_1(X,*)=0$. Se γ e δ sono cammini da x_0 in x_1, allora $[\gamma]=[\gamma.\overline{\delta}.\delta]=[\delta]$, poiché $\gamma.\overline{\delta}$ (che è un circuito basato a x_0) è nullomotopo, essendo $\pi_1(X,x_0)$ nullomotopo. Viceversa se vi è un'unica classe di omotopia di cammini da x_0 a x_0, allora $\pi_1(X,x_0)=0$. □

Osserviamo inoltre che

Proposizione 9. Sia X uno spazio topologico connesso per archi, allora X è semplicemente connesso se e solo se ogni funzione continua $f \in C(S^1, X)$ è nullomotopa.

Dimostrazione. Esercizio non banale. □

Corollario 10. Ogni spazio contraibile è connesso per archi.

Dimostrazione. Sia T uno spazio topologico qualsiasi, allora, essendo X contraibile $[T,X]$ è formato da un elemento, in particolare quindi ogni $f:\mathbb{S}^1 \longrightarrow X$ è nullomotopa. □

Si noti che il viceversa di tale corollario è lungi dall'essere vero, ad esempio, vedremo in futuro che per $n \geq 2$ le sfere sono semplicemente connesse ma non sono contraibili.

Invarianza omotopica

Nell'introduzione abbiamo detto che in topologia algebrica cerchiamo di costruire immagini algebriche (ad esempio il gruppo fondamentale) di oggetti topologici (di uno spazio puntato) e abbiamo detto che le funzioni tipi "tipiche" tra tali oggetti topologici (le funzioni continue tra spazi puntati che preservano il punto base) sarebbero diventate morfismi tra le rispettive immagini algebriche. In questa sezione studieremo le immagini delle funzioni continue che preservano il punto base tra spazi puntati, vedremo che esse "inducono" degli omomorfismi tra le immagini algebriche, in questo caso tra i gruppi fondamentali degli spazi puntati di partenza. Sarà quindi importante distinguere gli isomorfismi, in modo da poter stabilire se due spazi sono o meno omeomorfi, come abbiamo visto nell'introduzione.

Una funzione continua $f:(X,x_0)\longrightarrow(Y,y_0)$ tale che $y_0=f(x_0)$ induce un'omomorfismo di gruppi tra $\pi_1(X,x_0)$ e $\pi_1(Y,y_0)$

$$f_*:\pi_1(X,x_0)\longrightarrow\pi_1(Y,y_0)$$

mediante la composizione di circuiti basati a x_0 con la funzione f:

$$f_*([\alpha])=[f\circ\alpha].$$

Notiamo che f_* è ben definita dal momento che un'omotopia h_t di circuiti basati a x_0 rende un'omotopia per composizione $h_t\circ\alpha$ di circuiti basati a y_0, quindi $f_*([h_0])=[f\circ h_0]=[f\circ h_1]f_*([h_1])$. Inoltre f_* è un omomorfismo dal momento che se $g:(Y,y_0)\longrightarrow(Z,z_0)$ è un altro omomorfismo, si fa $g_*\circ f_*=(g\circ f)_*$.

Ora mostriamo che l'omomorfismo indotta da una funzione continua f che preserva il punto base tra spazi puntati è invariante per omotopia relative al punto base.

Proposizione 11. Siano $f,g:(X,x_0)\longrightarrow(Y,y_0)$ funzioni continue tra spazi puntati che preservano il punto base e sia $H:X\times I\longrightarrow Y$ un'omotopia relativamente a $\{X_0\}$ di f in g. Allora gli omomorfismi $f_*, g_*: \pi_1(X,x_0)\longrightarrow\pi_1(Y,y_0)$ coincidono.

Dimostrazione. Per ogni circuito α di X basato a x_0 si ha

$$[f\circ\alpha]=[g\circ\alpha]$$

Inoltre per un tale α

$$(s,\lambda)\longmapsto H(\alpha(s),\lambda)$$

è omotopia di $f \circ \alpha$ in $g \circ \alpha$ in cui $y_0 = f(x_0) = g(x_0)$. $\square$

Cosa accade, invece, se un'omotopia sposta i punto base?

Proposizione 12. Siano $f, g : X \longrightarrow Y$ funzioni continue tra spazi topologici X, Y, sia $H : X \times I \longrightarrow Y$ un'omotopia tra f e g. Fissato $x_0 \in X$ siano $y_0 = f_(x_0)$, $y_1 = g(x_0)$ e $\gamma : I \longrightarrow Y$ definita da $\gamma(x_0, \lambda)$ un cammino in Y di origine y_0 ed estremo y_1. Allora $g_* = h_{[}\gamma] \circ f_*$.

Dimostrazione. Si deve verificare che per ogni circuito α di X basato a x_0 si ha $[g \circ \alpha] = [\gamma]^{-1}[f \circ \alpha][\gamma]$ o equivalentemente che $[\gamma][g \circ \alpha] = [f \circ \alpha][\gamma]$. Prendiamo $h : I \times I \longrightarrow X$ definita da $h(s, \lambda) = H(\alpha(s), \lambda)$. Si ha $h(0, \lambda) = H(0, \lambda) = \gamma(\lambda)$, $h(s, 1) = H(\alpha(s), 1) = g \circ \alpha(t)$, $h(s, 0) = H(\alpha(s), 0) = f \circ \alpha(s)$, $h(1, \lambda) = H(\alpha(1), \lambda) = H(x_0, \lambda) = \gamma(\lambda)$, per ogni $s, \lambda \in I$. La conclusione segue dal seguente

Lemma 13 (Lemma del quadrato). Siano $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2$ cammini in X ch formano un quadrato nello spazio dei cammini $\Pi_1 X$, nel senso che $\alpha_1(0) = \alpha_2(0) = v_{00}$, $\alpha_1(1) = \beta_2(0) = v_{01}$, $\alpha_2(2) = \beta_1(0) = v_{10}$ e $\beta_1(1) = \beta_2(1) = v_{11}$. Il quadrato è commutativo in $\Pi_1 X$, cioè si ha $[\alpha_1][\beta_2] = [\alpha_2][\beta_1]$, se e solo se la funzione $u : \partial(I \times I) \longrightarrow X$ definita sul bordo del quadrato ponendo $u(s, 0) = \alpha_2(s)$, $u(s, 1) = \beta_2(s)$, $u(0, \lambda) = \alpha_1(\lambda)$ e $u(1, \lambda) = \beta_1(\lambda)$ si estende ad una funzione continua $U : I \times I \longrightarrow X$.

$\square$

Un'importante risultato derivante daladalla proposizione precedente è il seguente

Corollario 14. Sia $f : X \longrightarrow Y$ un'invarianza omotopica per ogni $x_0 \in X$ fissato. Allora

$$f_* : \pi_1(X, x_0) \longrightarrow \pi_2(Y, f(x_0))$$

è un isomorfismo di gruppi.

Dimostrazione. Sia $g : y \longrightarrow X$ un'inversa omotopica di f. Posto $y_0 = f(x_0)$ e $x_1 = g(y_0)$, se H è omotopia di id_X con $g \circ f$, posto $\eta(\lambda) = H(x_0, \lambda)$, l'identità di $\pi_1(X, x_1)$ coincide $h_{[\eta]} \circ (g \circ f)_*$, in cui $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$, e va da $\pi_1(X, x_0)$ a $\pi_1(X, x_1)$. Poiché $h_{[\eta]}$ è isomorfismo, $g_* \circ f_*$ è pure isomorfismo, in particolare g_* è suriettivo e f_* è iniettivo.

Analogamente, usando il fatto che $f \circ g$ è omotopa a id_Y si ricava che g_* è iniettivo e f_* è suriettivo. Pertanto g_* e f_* sono biiettivi e quindi isomorfismi. $\square$

Allora per i retratti di deformazione forte si ricava che

Corollario 15. Sia X spazio topologico e $S \subset X$ sottospazio topologico di X. Se S è retratto di deformazione forte di X, allora l'inclusione canonica $\iota_S : S \hookrightarrow X$ induce un isomorfismo $\iota_{S*} : \pi_1(S, x_0) \longrightarrow \pi_1(X, x_0)$, per ogni $x_0 \in S$.

Dimostrazione. Esercizio. $\square$

Dal corollario precedente si ricava il seguente

Fatto. Ogni retratto di deformazione forte di uno spazio topologico semplicemente connesso è semplicemente connesso.

Vediamo ora un'importante risultato che permette di determinare il gruppo fondamentale di un prodotto diretto di spazi topologici.

Proposizione 16. Se $(X_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ è una famiglia di spazi topologici e $x_\lambda \in X_\lambda$ per ogni $\lambda \in \Lambda$, si definisce il prodotto diretto degli spazi X_λ, $X = \prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$. Allora la funzione

$$\prod_{\lambda \in \Lambda} pr_{*\lambda} : \pi_1(X, x) \longrightarrow \prod_{\lambda \in \Lambda} \pi_1(X_\lambda, x_\lambda)$$

è un isomorfismo di gruppi.

In altre parole il gruppo fondamentale di un prodotto di spazi topologici è canonicamente isomorfo al prodotto dei gruppi fondamentali degli spazi stessi. Usando la proposizione precedente è immediato determinare il gruppo fondamentale di spazi che sono il prodotto diretto di altri spazi topologici il cui gruppo fondamentale è noto.

Esempio 8. Il gruppo fondamentale del toro n-dimensionale $\mathbb{T}^n$ è il prodotto diretto dei gruppi fondamentali di n copie di $\mathbb{S}^1$, cioè $\pi_1(\mathbb{T}^n) \sim \underbrace{\pi_1(\mathbb{S}^1) \times \ldots \times \pi_1(\mathbb{S}^1)}_{n-volte}$.

Sia $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{C}^\times$ un circuito basato a 1, pensato come funzione di I in $\mathbb{S}^1$. Possiamo allora affermare che l'indice di avvolgimento $\mathrm{ind}_\gamma(0)$ di γ attorno a 0 è invariante per per omotopia relativamente a ∂I. Possiamo allora definire la funzione

$$\mathrm{ind}(0) : \pi_1(\mathbb{S}^1, 1) \longrightarrow \mathbb{Z}$$

Teorema 17. ind(0) induce un isomorfismo di gruppi, $\pi_1(\mathbb{S}^1, 1) \cong \mathbb{Z}$.

Dimostrazione. In primo luogo mostriamo che ind(0) è un omomorfismo di gruppi.

$$\begin{aligned}
\mathrm{ind}(0)\big([\gamma_1.\gamma_2]\big) &= \frac{1}{2\pi i}\int_0^{1/2} \frac{2\gamma_1'(2t)}{\gamma_1(2t)}\,dt + \frac{1}{2\pi i}\int_{1/2}^{1} \frac{2\gamma_2'(2t-1)}{\gamma_2(2t-1)}\,dt \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_0^{1} \frac{\gamma_1'(\tau)}{\gamma_1(\tau)}\,d\tau + \frac{1}{2\pi i}\int_0^{1} \frac{2\gamma_2'(\tau)}{\gamma_2(\tau)}\,d\tau \\
&= \mathrm{ind}(0)\big([\gamma_1]\big) + \mathrm{ind}(0)\big([\gamma_2]\big)
\end{aligned}$$

Ciò assicura che ind(0) è morfismo di gruppi. La suriettività è banale, infatti

$$\mathrm{ind}(0)\big([e^{2\pi i n t}]\big) = \frac{1}{2\pi i}\int_0^1 \frac{2\pi i n\, e^{2\pi i n t}}{e^{2\pi i n t}}\,dt = n$$

Mostriamo ora l'iniettività di ind(0). Sia γ un circuito, almeno C^1 a tratti, tale che $\mathrm{ind}(0) = 0$, mostriamo allora che γ è nullomotopo. Consideriamo la funzione esponenziale $e : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{S}^1$, $t \longmapsto e^{2\pi i t}$. Notiamo che esiste un unico circuito $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}$ basato a 0 tale che $\gamma = e \circ \alpha$, infatti dal fatto che

$$2\pi i\, \alpha' = \frac{\gamma'}{\gamma}$$

si ricava, integrando

$$\alpha(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_0^t \frac{\gamma'(\tau)}{\gamma(\tau)}\,\tau + \kappa$$

per qualche $\kappa \in \mathbb{R}$. Le condizioni $\alpha(0) = 0$. $\alpha(0) = \kappa$ e $= 0 = \alpha(1) = \mathrm{ind}_\gamma(0) + \kappa$ determinano univocamente $\kappa = 0$.[4] $\mathbb{R}$ è contraibile e quindi semplicemente connesso, possiamo allora scrivere un'omotopia H relativamente a ∂I di α con il circuito costante ϵ_0. (Possiamo ad esempio usare l'omotopia affine $H(s, \lambda) = (1 - \lambda)\alpha(s)$.) Allora $e \circ H$ definisce un'omotopia relativamente a ∂I di γ in ϵ_1. □

"Applicazioni"

Vedremo ora alcune applicazioni del fatto che $\pi_1(\mathbb{S}^1, 1) \cong \mathbb{Z}$. Il primo risultato è in un certo senso particolare, infatti, sebbene, in topologia algebrica è in generale l'algebra ad servizio della topologia, il prossimo risultato è un esempio del viceversa.[5]

Teorema 18 (Teorema fondamentale dell'algebra). Ogni polinomio non costante a coefficienti complessi possiede almeno uno zero complesso.

Dimostrazione. Consideriamo un polinomio (monico) di grado n a coefficienti complessi:

$$P(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0$$

Assumiamo che $P(z)$ non abbia zeri in $\mathbb{C}$, allora per $r \in \mathbb{R}_\geq$ la relazione

$$\gamma_r(s) = \frac{P(r\, e^{2\pi i s})/P(r)}{\mid P(r\, e^{2\pi i s})/P(r) \mid}, \quad e \in I$$

[4] Vedremo oltre che ciò significa che α è un rialzamento di γ tramite la mappa esponenziale, che è un rivestimento del circolo unitario.

[5] Questo aspetto sottolinea ancora una volta l'unitarietà della matematica.

definisce una famiglia di circuiti in $\mathbb{S}^1$ basati a 1. Al variare di r, γ_r è un omotopia di circuiti basati a 1. Dal momento che γ_0 è il circuito banale, si ha che $[\gamma_r]$, per ogni r fissato, è la classe nulla. Ora fissiamo un valore "grande" di r, $r >> 1$, maggiore di $1+ \mid a_{n-1} \mid + \ldots + \mid a_0 \mid$. Allora per $r = \mid z \mid$

$$\mid z^n \mid = r^n = r \cdot r^{n-1} > \big(\mid a_{n-1} \mid + \ldots + \mid a_0 \mid \big) \mid z^{n-1} \mid \geq \mid a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_0 \mid$$

di conseguenza, per ogni $\tau \in I$, il polinomio

$$P_\tau(z) = z^n + \tau(a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_0)$$

non ha radici sul circolo $\mid z \mid = r$.

Nell'espressione di γ_r sostituiamo $P(z)$ con $P_\tau(z)$ e facciamo variare τ in I. Si ottiene così un'omotopia di $\gamma_r(s)$ (ottenuto per $\tau = 1$) in $e^{2\pi i n s}$. Ora $e^{2\pi i n s}$ è n-volte un generatore del gruppo ciclico infinito $\pi_1(\mathbb{S}^1)$ e ciò implica che $n = [e^{2\pi i n s}] = [\gamma_r] = 0$, cioè che P è un polinomio costante. □

Vediamo ora altri due risultati, questa volta di carattere topologico.

Teorema 19 (Teorema del punto fisso di Brouwer in dimensione 2). Ogni funzione continua $h : \mathbb{D}^2 \longrightarrow \mathbb{D}^2$ ha almeno un punto fisso.

Dimostrazione. Supponiamo che $h(x) \neq x$, per ogni $x \in \mathbb{D}^2$. Allora possiamo definire una funzione $r : \mathbb{D}^2 \longrightarrow \mathbb{S}^1$, in cui $r(x)$ è il punto si $\mathbb{S}^1$ in cui il raggio di $\mathbb{R}^2$ che parte da $h(x)$ e passa per x lascia il 2–disco. La continuità di r è immediata, poiché punti vicini del disco vengono mandati in punti vicini del circolo. Inoltre se $x \in \mathbb{S}^1$ $r(x) = x$. Quindi r è una retrazione di $\mathbb{D}^2$ in $\mathbb{S}^1$.

Ora mostreremo che una tale retrazione non può esistere. Sia γ_0 un circuito in $\mathbb{S}^1$. In $\mathbb{D}^2$ esiste una omotopia di γ_0 ad un circuito costante (essendo $\mathbb{D}^2$ semplicemente connesso), per esempio $H(s, \lambda) = (1-\lambda)\gamma_0(s) + \lambda x_0$, in cui x_0 è il punto base di γ_0. Dal momento che la retrazione r ristretta a $\mathbb{S}^1$ è l'identità su $\mathbb{S}^1$, la composizione $r \circ H$ è un'omotopia in $\mathbb{S}^1$ da $r \circ \gamma_0 = \gamma_0$ al circuito costante x_0, cioè $\pi_1(\mathbb{S}^1) = 0$, che è assurdo. □

Osservazione. Il teorema di Brouwer ha validità più generale di quanto qui dimostrato, si estende, cioè, a funzioni continue di $\mathbb{D}^n$ in sè. Dimostrazioni topologiche di tali generalizzazioni utilizzano i gruppi di omotopia di ordine superiore oppure i gruppi di omologia. Queste ultime sono notevolmente più semplici di quelle coinvolgenti i gruppi di omotopia di ordine superiore. È inoltre interessante osservare che le dimostrazioni topologiche del teorema di Brouwer sono piuttosto recenti, rispetto all'originale di Brouwer stesso, che usa, invece, metodi analitico–geometrici essenzialmente basati sulla teoria del grado topologico.

Teorema 20 (Teorema di Borsuk–Ulam in dimensione 2). Ogni funzione continua f di $\mathbb{S}^2$ in $\mathbb{R}^2$ è tale per cui esiste una coppia di punti antipodali, esistono, cioè, due punti x e $-x$ tali che $f(x) = f(-x)$.

Dimostrazione. Omessa. □

Anche il teorema appena dimostrato si generalizza a funzioni continue di $\mathbb{S}^n$ in $\mathbb{R}^n$ e non è per nulla ovvio, nemmeno da un punto di vista *fisico*.

Una conseguenza importante del teorema di Borsuk–Ulam in dimensione 2 è la non esistenza di omeomorfismi di $\mathbb{S}^2$ in $\mathbb{R}^2$ e quindi il fatto, tutt'altro che ovvio da dimostrare "per bene", che $\mathbb{S}^2$ non è omeomorfo ad alcun sottospazio topologico di $\mathbb{R}^2$.

5. Il teorema di Seifert–Van Kampen e applicazioni

In questa sezione enunceremo, senza però dimostrarlo, il teorema di Seifert-Van Kampen e poi lo applicheremo al calcolo di gruppi fondamentale di alcuni spazi importanti. Se uno spazio topologico puntato si può decomporre in spazi il cui gruppo fondamentale è noto, il teorema di Seifert-Van Kampen da delle condizioni per determinare il gruppo fondamentale dello spazio in questione a partire dai gruppi fondamentali degli spazi in cui esso si decompone.

Sia (X, x_0) uno spazio topologico puntato che si possa decomporre come unione di una collezione di sottoinsiemi aperti connessi per archi U_λ, $\lambda \in \Lambda$, ognuno contenente il punto base x_0. Dalla teoria dei prodotti liberi di gruppi si ha che gli omomorfismi $j_{\lambda *} : \pi_1(U_\lambda, x_0) \to \pi_1(X, x_0)$, indotti dalle inclusioni canoniche $j_\lambda'' U_\lambda \hookrightarrow X$, si estendono ad un omomorfismo $\Phi : *_\lambda \pi_1(U_\lambda, x_0) \to \pi_1(X, x_0)$. Il teorema di Seifert-Van Kampen fornisce delle condizioni affinché Φ sia suriettivo e permette di controllare il nucleo di Φ.

Teorema 21 (Teorema di Seifert-Van Kampen). Assumiamo che

(i) $\{U_\lambda,\ \lambda \in \Lambda\}$ sia un ricoprimento aperto di (X, x_0) e ognuno degli U_λ sia connesso per archi;
(ii) $x_0 \in \bigcap_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda$;
(iii) per ogni coppia $\lambda, \mu \in \Lambda$ $U_\lambda \cap U_\mu$ sia connesso per archi;

allora Φ è suriettivo.

(iv) se inoltre per ogni $\lambda, \mu, \nu \in \Lambda$ $U_\lambda \cap U_\mu \cap U_\nu$ è connesso per archi;

allora kerΦ è il sottogruppo normale di $*_\lambda\, \pi_1(U_\lambda, x_0)$ generato da tutti gli elementi del tipo $j_{\lambda\mu\,*}(\alpha)\, j_{\mu\lambda\,*}(\alpha^{-1})$ (in cui $j_{\lambda\mu\,*} : \pi_1(U_l a \cap U_\mu) \to \pi_1(U_\lambda)$ è l'omomorfismo indotto dall'inclusione canonica $j_{\lambda\mu} : U_\lambda \cap U_\mu \hookrightarrow U_\lambda$; inoltre si ha che $j_{\lambda*} \circ j_{\lambda\mu\,*} = j_{\mu*} \circ j_{\mu\lambda\,*}$). Allora Φ induce un isomorfismo di $\pi_1(X, x_0)$ in $*_\lambda \pi_1(U_\lambda)/\ker\Phi$.

Dall'enunciato del teorema è immediato ricavare il seguente

Corollario 22. Nelle ipotesi del teorema 20, sia $M \subset \Lambda$ e $\{U_\lambda,\ \lambda \in M\}$ sia un sottoricoprimento aperto, finito e semplicemente connesso di (X, x_0), allora X è semplicemente connesso.

"Applicazioni" del teorema di Seifert-Van Kampen

Studiamo ora due risultati importanti legati ad una particolare situazione, ossia il caso in cui il ricoprimento aperto sia composto di due soli aperti. Le dimostrazioni di questi due risultati sono diretta conseguenza del Teorema 20 e di alcuni argomenti di base di teoria dei gruppi.

Corollario 23. Sia $\{U, V\}$ un ricoprimento aperto di (X, x_0), con $x_0 \in U, V$. Inoltre siano U, V e $U \cap V$ connessi per archi e $U \cap V$ semplicemente connesso. Allora $\pi_1(X, x_0)$ è isomorfo al prodotto libero $\pi_1(U, x_0) * \pi_1(V, x_0)$ (rispetto alle inclusioni canoniche $i_U : U \cap V \hookrightarrow U$ e $i_V : U \cap V \hookrightarrow V$).

Applichiamo subito il seguente esempio al calcolo del gruppo fondamentale della somma connessa di due cerchi.

Esempio 9 (Somma connessa (o bouchet) di due cerchi). Applichiamo il Corollario 23 al calcolo del gruppo fondamentale della somma connessa $\mathbb{S}^1 \# \mathbb{S}^1$ di due cerchi. In primo luogo si osservi che non possiamo prendere i due cerchi stessi come intorni U e V, infatti essi rispettano tutte le ipotesi richieste dal corollario tranne quella di formare un ricoprimento aperto, i due cerchi sono infatti chiusi. Prendiamo allora $U = \mathbb{S}^1\#\mathbb{S}^1 \setminus x_1$ e $V = \mathbb{S}^1\#\mathbb{S}^1 \setminus x_2$, in cui x_1 e x_2 sono due punti di $\mathbb{S}^1\#\mathbb{S}^2$, uno in un circolo e uno nell'altro. Ovviamente U, V e $U \cap V$ sono aperti e connessi per archi (e ricoprono ovviamente $\mathbb{S}^1\#\mathbb{S}^1$), contengono il punto base x_0 e $U \cap V$ è semplicemente connesso. Inoltre sia U che V hanno per retratto di deformazione forte un cerchio (più precisamente U e V hanno come retretta di deformazione forte il circolo della somma connessa a cui non è stato sottratto un punto), quindi

$$\pi_1(\mathbb{S}^1\#\mathbb{S}^1, x_0) \cong \pi_1(\mathbb{S}^1, x_0) * \pi_1(\mathbb{S}^1, x_0) \cong Z * \mathbb{Z}$$

cioè il gruppo fondamentale della somma connessa di due circoli è isomorfo al gruppo libero su due generatori.

Esercizio 3. Determinare il gruppo fondamentale del piano reale $\mathbb{R}^2 \setminus \{\mathrm{Pt}_1, \mathrm{Pt}_2\}$ privato di due punti.

Esercizio 4. Determinare il gruppo fondamentale del piano complesso $\mathbb{C}^2 \setminus \{\mathrm{Pt}_1, \mathrm{Pt}_2\}$ privato di due punti.

Esercizio 5. Determinare il gruppo fondamentale del 2-disco $\mathbb{D}^2 \setminus \{a, b\}$, $a, b \in \mathrm{Int}(\mathbb{D}^2)$.

Esercizio 6. Determinare il gruppo fondamentale della somma connessa di due cerchi. *(Suggerimento: procedere per induzione.)*

Vediamo ora l'altro risultato introdotto precedentemente

Corollario 24. Sia $\{U, V\}$ un ricoprimento aperto di (X, x_0) con $x_0 \in U, V$. Inoltre siano $U, V, U \cap V$ connessi per archi e U sia semplicemente connesso. Allora $\pi_1(X, x_0)$ è isomorfo a $\pi_1(V, x_0)/N$, in cui N è il più piccolo sottogruppo normale di $\pi_1(V, x_0)$ che contiene $j_{V*}(\pi_1(U \cap V, x_0))$, in cui $j_V : U \cap V \hookrightarrow V$ è l'inclusione canonica su V.

Applichiamo ora il Corollario 24 ad alcuni importanti spazi puntati per la teoria delle superfici: ricalcoliamo il gruppo fondamentale del 2-toro e poi il gruppo fondamentale del piano proiettivo reale. Poi generalizzeremo il tutto al caso delle somme connesse di n tori e n piani proiettivi reali.

Esempio 10 (Gruppo fondamentale del 2-toro $\mathbb{T}^2 \cong \mathbb{S}^1 \# \mathbb{S}^1$). Ricordiamo che il toro pò essere ottenuto identificando, con la corretta orientazione, le facce opposte di un quadrato (vedi figura ??). I lati a e b identificati diventano dei circuiti basati a x_0. Sia ora y il centro del quadrato e x_1 un punto interno del quadrato e sia d un cammino da x_0 a x_1 (orientato come in figura) infine sia c un circuito basato a x_1 che avvolge y (orientato come in figura). Sia U l'immagine dell'interno del quadrato sotto identificazione e sia V l'intero quadrato privato del centro, $V = \mathbb{T}^2 \setminus \{y\}$. $U \cap V$ è l'immagine dell'interno del quadrato priva del centro mediante l'identificazione. Ovviamente U, V e $U \cap V$ sono aperti e connessi per archi, inoltre U è semplicemente connesso, per cui sono rispettate le ipotesi del Corollario 24 e quindi $\pi_1(X, x_1) \cong \pi_1(V, x_1)/N$. Si osservi che $x_0 \ni U$ quindi calcoliamo il gruppo fondamentale del toro rispetto al punto base x_1 che invece appartiene sia ad U che a V; per determinare poi il gruppo fondamentale di $(\mathbb{T}^2, x_0)$, sarà sufficiente coniugare rispetto alla classe del cammino d. Si osservi ora che il bordo del quadrato è un retratto di deformazione forte dell'intero quadrato meno un punto interno e quindi il gruppo fondamentale di (V, x_0) è isomorfo al gruppo libero su due generatori α e β che rappresentano, rispettivamente, la classe di omotopia dei circuiti a e b. Se δ rappresenta la classe del cammino d, allora $\pi_1(V, x_1)$ è il gruppo libero su due generatori[6]

$$\alpha' = \delta^{-1}\alpha\delta, \qquad \beta' = \delta^{-1}\beta\delta$$

Notiamo ora, invece, che $U \cap V$ ha lo stesso tipo di omotopia di un cerchio e quindi $\pi_1(U \cap V, x_1)$ è il gruppo (libero) ciclico infinito generato dalla classe γ del circuito c attorno al centro y del quadrato. Quindi, dalla figura è semplice ricavare che $j_{V*}(\gamma) = \alpha'\beta'\alpha'^{-1}\beta'^{-1} = \delta^{-1}\alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1}\delta$. Allora si ha che $\pi_1(\mathbb{T}^2, x_1)$ è isomorfo al gruppo libero su due generatori α' e β' modulo il sottogruppo normale generato da $\alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1}$. Cambiando il punto base dello spazio puntato da x_1 a x_0 si ricava che $\pi_1(\mathbb{T}^2, x_0)$ è isomorfo al gruppo libero su due generatori α e β modulo il sottogruppo normale che contiene $\alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1}$. In questo caso possiamo determinare esplicitamente la struttura del gruppo fondamentale di $(\mathbb{T}^2, x_0)$. Osserviamo, che i generatori del toro commutano, cioè il gruppo fondamentale del toro deve essere un gruppo abeliano, cioè il più piccolo sottogruppo normale di $\pi_1(V, x_1)$ deve contenere il sottogruppo dei commutatori, d'altra parte, però, il gruppo dei commutatori è normale e contiene tale gruppo. Cioè il più piccolo sottogruppo normale contenente $\alpha.\beta.\alpha^{-1}.\beta^{-1}$ è il gruppo dei commutatori, per cui il gruppo fondamentale del toro è il gruppo abeliano libero su due generatori α e β.

Esempio 11 (Somma connessa di due piani proiettivi reali $\mathbb{RP}^2$). Pensiamo al piano proiettivo reale come allo spazio ottenuto identificando coerentemente con l'orientazione i lati opposti di un poligono a due lati (vedi figura ??). Il lato a mediante l'identificazione diviene un circuito basato a x_0. Sia y il centro del 2-poligono, x_1 un punto interno al 2-poligono e d un cammino da x_0 a x_1 (orientato come in figura), infine sia c un circuito basato a x_1 che avvolge y (orientato come in figura). Sia U l'immagine dell'interno del 2-poligono mediante l'identificazione e V il 2-poligono privato del centro y, $V = \mathbb{RP}^2 \setminus y$. U, V e $U \cap V$ sono aperti e connessi per archi e contengono il punto x_1, inoltre U è semplicemente connesso. Sono quindi rispettate le ipotesi del Corollario 24. Il circolo a è retratto di deformazione forte di V, quindi $\pi_1(V) \cong \mathbb{Z}$. Sia α la classe di circuiti basati ad x_0 che rappresenta a, allora α genera $\pi_1(V, x_0)$. Se δ è la classe di cammini da x_0 a x_1, allora $\delta' = \delta^{-1}\alpha\delta$ genera $\pi_1(V, x_1)$. Osserviamo che anche $U \cap V$ ha lo stesso tipo di omotopia di un cerchio. Denotando con γ la classe dei circuiti che rappresentano c, si ha che $\pi_1(U/capV, x_1)$ è generato da γ. Osserviamo che $j_{V*}(\pi_1(U \cap V, x_1))$ è generato da $\alpha' = \delta^{-1}\alpha\delta$, quindi $\pi_1(\mathbb{RP}^2, x_1)$ è isomorfo al gruppo ciclico infinito su un generatore α' modulo il sottogruppo normale generato da α'^2.[7] Allora $\pi_1(\mathbb{R}^{\mathbb{P}^2}, x_0)$ è il gruppo libero infinito generato da α modulo il sottogruppo normale generato da α^2; $\pi_1(\mathbb{RP}^2, x_0)$ ciclico di ordine 2.

Si noti che la ciclicità di ordine 2 non è un caso, ma è, in realtà, una caratterizzazione delle superfici non orientabili. Noi non entreremo nello specifico della teoria delle superfici, ma che volesse approfondire tali aspetti può riferirsi a [M].

Esempio 12 (Somma connessa di n tori). Calcoliamo ora il gruppo fondamentale della somma connessa $X = \underbrace{\mathbb{T}^2 \# \ldots \# \mathbb{T}^2}_{n-\text{volte}}$ di n tori. X può essere ottenuto come indicato dalla figura ?? identificando a coppie coerentemente con l'orientazione e con le etichette i lati di un $4n$-poligono. Sotto l'identificazione i lati $a_1, b_1, \ldots, a_n, b_n$ diventano circuiti basati ad x_0. In riferimento alla figura siano y il centro del poligono, x_1 un punto interno al poligono, d un cammino da x_0 a x_1 (orientato come in figura) e c un circuito (orientato come in figura)

[6] Si faccia attenzione che in quanto segue α, β, δ e γ indicano elementi del gruppo fondamentale e quindi classi di omotopia di circuiti o cammini (γ) e quindi l'operazione indicata è tra le classi e non tra i cammini, quindi se il "puntino".

[7] Notiamo che il sottogruppo di $\pi_1(V, x_1)$ generato da α'^2 è normale.

basato a x_1 che avvolge y. Chiamiamo U l'immagine mediante l'identificazione dell'interno del poligono e V l'intero poligono privato del centro, $V = X \setminus \{y\}$. È semplice osservare che tutte le ipotesi del Corollario 24 sono rispettate. Osserviamo che V si retrae per deformazione forte all'unione dei $2n$-circoli basati a x_0 e quindi $\pi_1(V, x_0)$ è isomorfo al gruppo libero su $2n$ generatori $\alpha_1, \beta_1, \ldots, \alpha_n, \beta_n$, in cui α_i e β_i denota la classe dei circuiti a_i e b_i, rispettivamente, per $i + 1, \ldots, n$. Analogamente a quanto fatto in precedenza $\pi_1(U/capV, x_1)$ è il gruppo libero ciclico infinito generato da γ e quindi $j_{V*}(\gamma) = \prod_{i=1}^{n} [\alpha'_i, \beta'_i]$.[8] Si ha allora che $\pi_1(X, x_0)$ è il quoziente del gruppo libero su $2n$-generatori modulo il sottogruppo normale generato da $\prod_{i=1}^{n} [\alpha'_i, \beta'_i]$.

Esempio 13 (Somma connessa di n piani proiettivi reali.). Procedendo in maniera analoga all'esempio precedente e al calcolo del gruppo fondamentale del piano proiettivo reale si ha che la somma connessa di n piani proiettivi reali si ottiene identificando coerentemente con l'orientamento e con le etichette i lati di un $2n$-poligono, vedi figura **??**. Da ciò si ricava, con l'ovvio significato dei simboli, che $\pi_1(\underbrace{\mathbb{RP}^2\#\ldots,\#\mathbb{RP}^2}_{n-\text{volte}}, x_0)$ è isomorfo al gruppo libero su n generatori $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ modulo il sottogruppo normale generato da $\alpha_1^2 \ldots \alpha_n^2$.

Osservazione. Da quanto fatto in questa sezione e dal teorema di classificazione delle superfici compatte (per il quale rimandiamo ad esempio a [M]) si può semplicemente ricavare il teorema di Poincarè in dimensione due e cioè che una superficie compatta e semplicemente connessa è omeomorfa ad una sfera.

Riferimenti bibliografici

[dM1] G. de Marco, *Topologia modulo B.* Scaricabile da http://www.math.unipd.it/ gdemarco/Topologia/Topol2004.pdf

[dM2] G. de Marco, *Qualche esercizio in preparazione all'esame.* Scaricabile da http://www.math.unipd.it/ gdemarco/Topologia/TopEsercizi2002.pdf

[dM3] G. de Marco, *Some topics of basic complex analysis.* Scaricabile da http://www.math.unipd.it/ gdemarco/Metodi/Basic.pdf

[H] A. Hatcher, *Algebraic Topology.* Scaricabile da http://www.math.cornell.edu/ hatcher/AT/ATpage.html

[M] W.S. Massey, *Algebraic topology: an introduction.* Springer.

[Spe] M. Spera, *Note del corso di Topologia modulo B.*

[8] In questa espressione e nelle precedenti si sono usate le convenzioni introdotte nei precedenti due esercizi, ossia γ denota la classe del circuito c e $\alpha'_i = \delta^{-1}\beta\delta$ e $\beta'_i = \delta^{-1}\alpha\delta$.