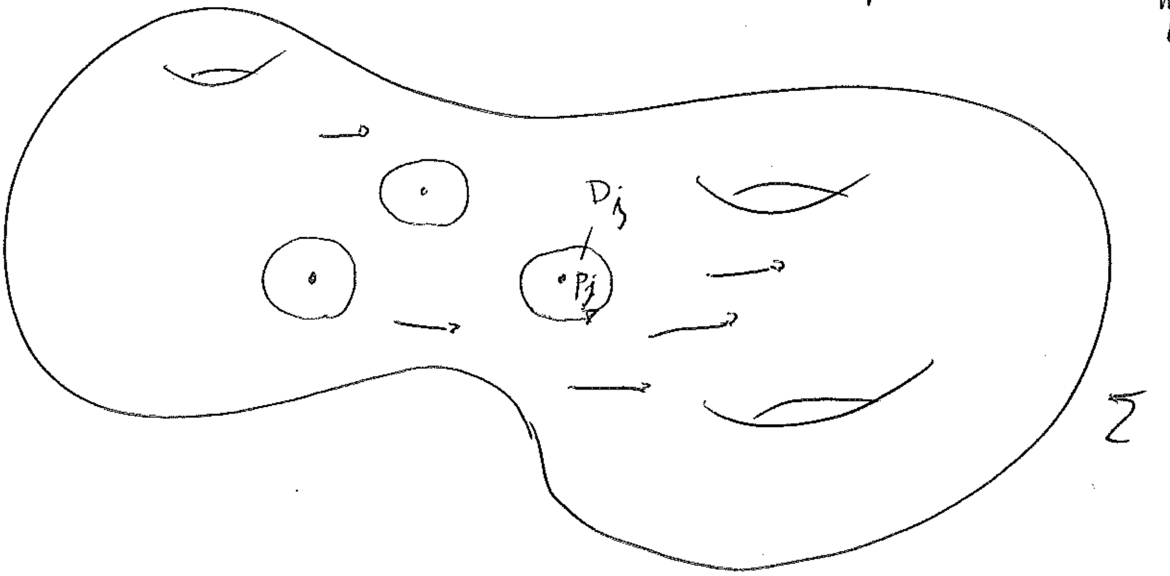
Il teorema di Gauss-Bonnet (alla Chern)

(globale - superficie chiuse orientabili) à la Chern

global ... orientable

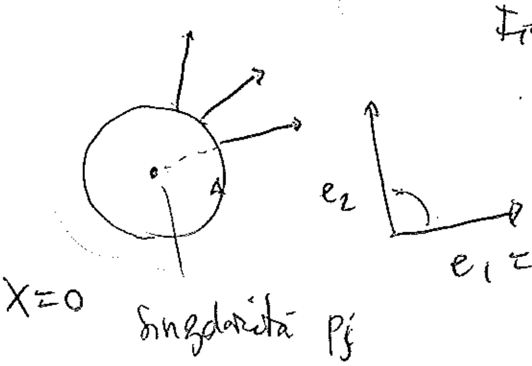
for closed orientable surfaces

closed: compact & without boundary



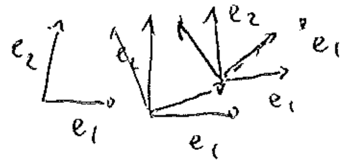
X : campo vettoriale su Σ, # finito di singolarità

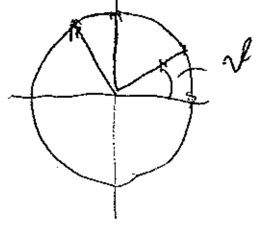
vector field ... singularities

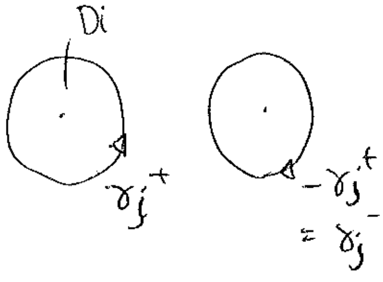


Fissiamo un riferimento mobile $(\bar{e}_1, \bar{e}_2)$, con $\bar{e}_1 = \frac{X}{\|X\|}$

Nel "dischetto" fissiamo anche un riferimento mobile (e_1, e_2) di riferimento







$\partial D_j = \gamma_j$

☆ Cartan :

equazione di Gauss

$$d\bar{\omega}_{12} = -K\,\bar{\omega}_1 \wedge \bar{\omega}_2$$

$$\parallel$$

$$\omega_1 \wedge \omega_2$$

$$d\bar{e}_1 = \bar{\omega}_{12}\,\bar{e}_2$$

2-forma d'area

$$\bar{\omega}_{12} = \omega_{12} + d\vartheta$$

$$d\bar{\omega}_{12} = d\omega_{12}$$

Calcoliamo :

$$\int_{\Sigma \setminus \bigcup_j D_j} K\,\omega_1 \wedge \omega_2 =$$

$$\int_{\Sigma \setminus \bigcup_j D_j} K\,\bar{\omega}_1 \wedge \bar{\omega}_2 = -\int_{\Sigma \setminus \bigcup_j D_j} d\bar{\omega}_{12} \underset{\text{(Stokes)}}{=} \sum_j \int_{\gamma_j^{+}} \bar{\omega}_{12} =$$

(attenzione...)

$$= \sum_i \int_{\gamma_i} \omega_{12} + d\vartheta = \sum_i \int_{\gamma_j^{+}} \omega_{12} + \sum_j \int_{\gamma_j^{+}} d\vartheta$$

$$= \sum_i \int_{D_i} d\omega_{12} + 2\pi \sum_j I_j$$

$$= -\sum_i \int_{D_i} K\,\omega_1 \wedge \omega_2 + 2\pi \cdot \sum_j I_j$$

$\Rightarrow$

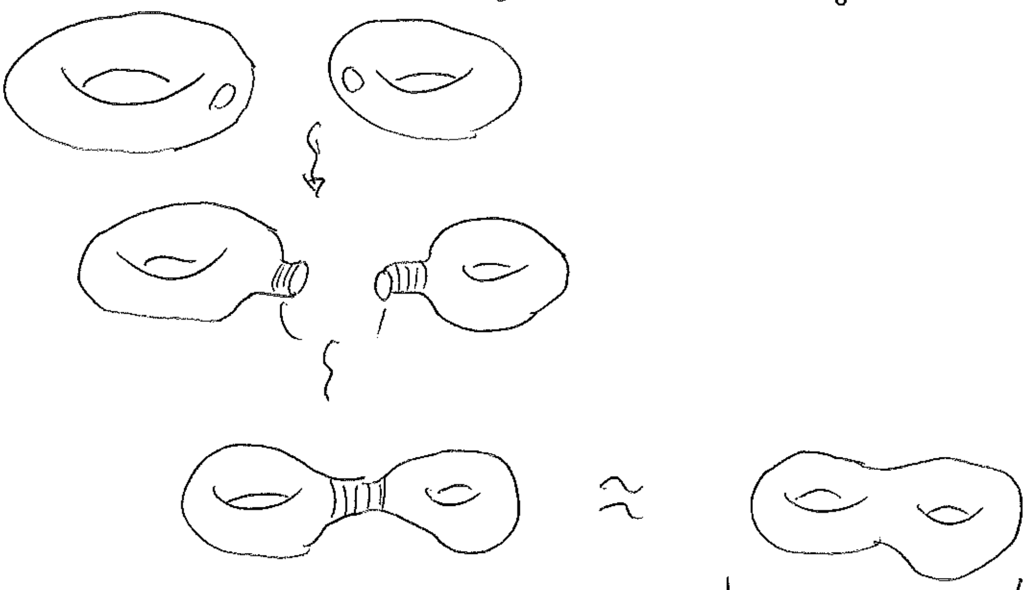
$$\int_\Sigma K\,\underbrace{\omega_1 \wedge \omega_2}_{\text{f. d'area}} = 2\pi \sum_j I_j = 2\pi\, i(X)$$

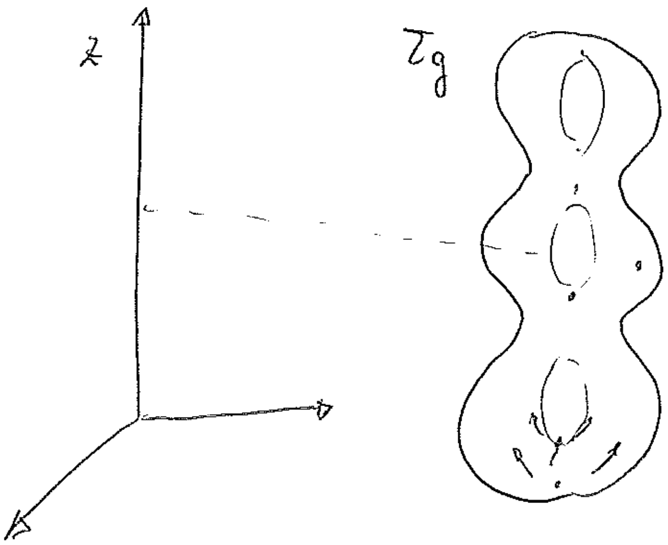
$$\boxed{\frac{1}{2\pi} \int_\Sigma K\, d\sigma = i(X)}$$

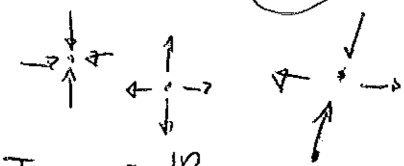
indipendente da X

$\Rightarrow$ $i(X)$ è indipendente da X !!

Calcoliamo $i(X)$ per una somma connessa di g tori $\equiv \Sigma_g$







$$f : \Sigma_g \to \mathbb{R}$$

$$p \longmapsto z(p) \quad \nwarrow \text{altezza}$$

resta definito ∇f, gradiente (riemanniano) di f su Σ_g

Sia $X = \nabla f$: esso possiede $2 + 2g$ pti critici,

1 max, 1 min (nodi : indice = +1)
nodo stabile, nodo instabile

e $2g$ selle (indice = −1), sicché $\boxed{i(X) = 2 - 2g = \chi(\Sigma_g)}$

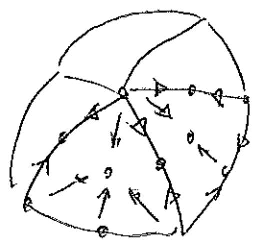
(teorema di Poincaré – Hopf)

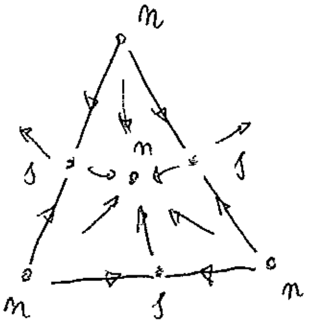
È inoltre: $\boxed{\frac{1}{2\pi}\int_{\Sigma_g} k \, d\sigma = i(X) = \chi(\Sigma_g)}$

*** (teorema di Gauss - Bonnet).

Non solo: sia $\mathcal{T}$ una triangolazione di Σ_g

(per es con triangoli geodetici)





n : nodi

s : selle

Definito un campo X come segue ⤴ (adattato alla triangolazione)

si ha $\chi(\Sigma_g) = 2 - 2g = i(X) = \underset{\substack{\# \\ \text{vertici} \\ \text{vertices}}}{V} - \underset{\substack{\# \\ \text{spigoli} \\ \text{edges}}}{E} + \underset{\substack{\# \\ \text{facce} \\ \text{faces}}}{F}$

Dunque (*** teorema di Eulero - Poincaré)

$$\boxed{V - E + F = \chi(\Sigma)}$$

indipendente da $\mathcal{T}$!

*** Chern (via Cartan) → Gauss - Bonnet

→ Poincaré - Hopf ← ne vedremo anche altre dimostrazioni

→ Euler - Poincaré ←

"paghi uno, prendi tre"

Si è lavorato in dim 2. Il tutto si generalizza opportunamente.

⚠ Nota importante

L'idea della dimostrazione di Chern

è una pietra miliare della matematica !!!
milestone

come già si comprende dalle applicazioni testé discusse.

Generalizzata opportunamente, porta alla teoria delle "Classi di Chern" e al loro calcolo tramite la geometria differenziale: "la curvatura accerta la topologia"
"topology via curvature"

⇝ notevolissime applicazioni nella fisica moderna

Altri esempi

Poichè $\chi(S^2) = 2$, $\nexists$ X su S^2 con $X(p) \neq 0$ $\forall p$.

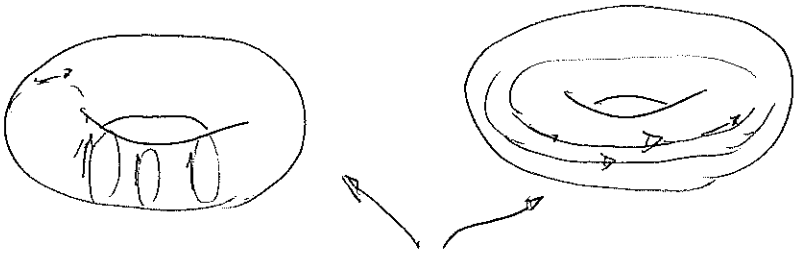
sfera

("Sfera impettinabile")

rotazione   pti critici: N e S, centri, ciascuno di indice $= +1$.

toro

$$\chi(\Sigma_1) = 0$$



Campi su Σ_1 privi di singolarità

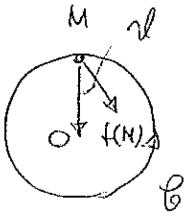
(il toro è "pettinabile")

☆☆☆ Teorema di Brouwer

Sia $f : \bar{D} \to \bar{D}$ un diffeomorfismo

disco chiuso

Allora f ha almeno un punto fisso



Dim. P.a., se $f(M) \neq M$, si consideri il campo vettoriale (liscio) $X : M \to \overrightarrow{M f(M)}$, privo di pti critici, sicché $i_{\mathcal{C}}(X) = 0$.

Si definisca, per $M \in \bar{D}$, $Y : M \longmapsto \overrightarrow{MO}$ (basterebbe def su $\mathcal{C}$), si ha subito $i_{\mathcal{C}}(Y) = 1$ (l'origine è pto critico, nodale)

Ora, dato che (v. fig.) $|\vartheta| < \frac{\pi}{2}$, X e Y devono avere lo stesso indice, risp. a $\mathcal{C}$, ma ciò è assurdo.