Prof. Lidia Angeleri, Prof. Francesca Mantese
Università di Verona, 2012/2013
Corso di Laurea in Matematica Applicata

Esercizi per il Corso di ALGEBRA

Foglio 12
10 gennaio 2013

1. Decidere se le seguenti equazioni su $\mathbb{Q}$ sono risolubili per radicali:
   (a) $x^5 - 2x^4 + 2x^3 - x^2 - x + 1 = 0$
   (b) $x^5 - 6x + 3 = 0$

(*10 punti*)

Gli esercizi seguenti sono dedicati alle *formule di Cardano-Tartaglia-Del Ferro* per la risoluzione di un'equazione cubica. Su un campo K di caratteristica zero che contenga una radice primitiva terza dell'unità $z \in E_3(K)$, consideriamo il polinomio

$$f = x^3 + px + q \in K[x].$$

Siano E un campo di riducibilità completa di f su K e $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in E$ gli zeri di f.

Siano inoltre

$$\delta = (\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_1 - \alpha_3)(\alpha_2 - \alpha_3) \in E$$
$$\Delta = \delta^2 = -4p^3 - 27q^2 \in K$$

dove Δ è il discriminante di f.

2. Si verifichi che:
   (a) Le funzioni elementari simmetriche $\tilde{s_1}, \tilde{s_2}, \tilde{s_3}$ nelle variabili $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ soddisfano
   $\tilde{s_1} = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0$
   $\tilde{s_2} = \alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3 = p$
   $\tilde{s_3} = \alpha_1\alpha_2\alpha_3 = -q$
   (b) $\delta = {\alpha_1}^2\alpha_2 + {\alpha_2}^2\alpha_3 + {\alpha_3}^2\alpha_1 - {\alpha_1}^2\alpha_3 - {\alpha_2}^2\alpha_1 - {\alpha_3}^2\alpha_2$
   (c) $3(z-z^2)\delta - 3\sum_{i\neq j} {\alpha_i}^2\alpha_j = 6z({\alpha_1}^2\alpha_2 + {\alpha_2}^2\alpha_3 + {\alpha_3}^2\alpha_1) + 6z^2({\alpha_1}^2\alpha_3 + {\alpha_2}^2\alpha_1 + {\alpha_3}^2\alpha_2)$

(*8 punti*)

3. Consideriamo gli elementi

$$\alpha = \alpha_1 + z\alpha_2 + z^2\alpha_3, \quad \beta = \alpha_1 + z^2\alpha_2 + z\alpha_3 \in E$$

Si verifichi che:
   (a) $2\alpha^3 + 27q = 3(z - z^2)\delta, \quad 2\beta^3 + 27q = -3(z - z^2)\delta \quad \text{e} \quad \alpha\beta = -3p.$
   (b) Gli elementi $a = \frac{\alpha^3}{27},\ b = \frac{\beta^3}{27}$ appartengono a $K(\delta)$ e sono gli zeri del polinomio

$$g = x^2 + qx - (\tfrac{p}{3})^3 \in K[x].$$

(*8 punti*)

4. Esistono $u, v \in E$ tali che l'elemento u è una radice terza di $a \in K(\delta)$, l'elemento v una radice terza di $b \in K(\delta)$ e $3uv = -p$. In tal caso $u + v$ è uno zero di f e

$$\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\} = \{u + v,\ z^2u + zv,\ zu + z^2v\}$$

(*4 punti*)

5. (a) Un polinomio $f \in \mathbb{R}[x]$ ha tre zeri distinti in $\mathbb{R}$ se $\Delta > 0$, al più due zeri distinti in $\mathbb{R}$ se $\Delta = 0$, uno zero in $\mathbb{R}$ e due zeri coniugati in $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ se $\Delta < 0$.

   (b) Si trovino gli zeri del polinomio $x^3 - 2x + 4 \in \mathbb{Q}[x]$ e si determini $\mathrm{Gal}(f/\mathbb{Q})$.

(*8 punti*)

Consegna: giovedì 24 gennaio durante le esercitazioni.