Sistemi - Versione A
Sistemi I Appello , 01/07/2019
Tempo a disposizione:
2h per seconda parte (Esercizi 1 - 2 - 3)
3h per il totale

Esercizio 1

Punteggio: 12 pt (Esame totale: 8pt)
Dato il sistema LTI causale a tempo discreto descritto dalla seguente equazione alla differenze :

$$v(k) - v(k-1) - \frac{3}{4}v(k-2) = -\frac{5}{2}u(k) - \frac{3}{4}u(k-1)$$
$$v(-1) = 2 \qquad v(-2) = -1 \qquad u(k) = (-\frac{1}{2})^k \delta_{-1}(k)$$

I) Calcolare la risposta libera nel tempo (esclusivamente nel tempo).
II) Si discuta la stabilitá asintotica e la stabilitá BIBO.
III) Calcolare la riposta impulsiva del sistema utilizzando l'anti-trasformata Zeta.
IV) Calcolare la riposta totale del sistema utilizzando l'anti-trasformata Zeta.

Esercizio 2

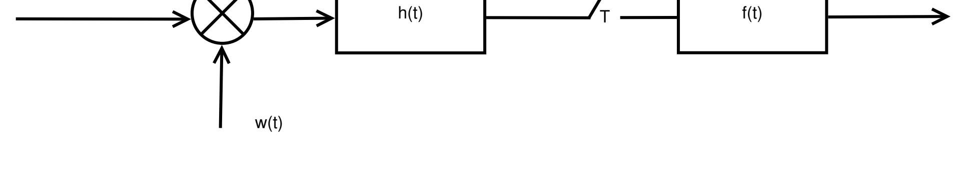
Punteggio: 10 pt (Esame totale: 7pt)
Data la seguente funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{10(s^2+4)}{s(s+3)(s^2+3s+4)}$$

I) Disegnare il diagramma di Bode (sia di ciascuna componente elementare, sia il risultante diagramma globale).
II) Considerare la coppia di zeri complessi coniugati. Quanto vale il coefficiente di smorzamento? Cosa si può dire sull'andamento del grafico reale rispetto a quello asintotico, in corrispondenza della pulsazione di risonanza associata?
III) Considerare ora la coppia di poli complessi coniugati. Quanto vale il coefficiente di smorzamento in questo caso? Cosa si può dire sull'andamento del grafico reale rispetto a quello asintotico, in corrispondenza della pulsazione di risonanza associata?

Esercizio 3

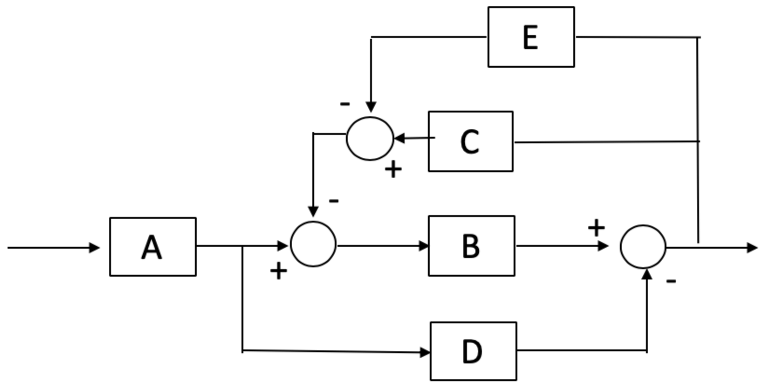
Punteggio: 8 pt (Esame totale: 6pt)
Dato il seguente schema a blocchi trovare l'uscita $\mathbf{v(t)}$ del sistema per via grafica lavorando nel dominio delle frequenze :



Dove $u(t) = sinc(2t) + 2$, $w(t) = 4cos(10\pi t)$, $h(t) = 4sinc(10t)$, $f(t) = 2sinc(2t)$.
Periodo di campionamento con $T = \frac{1}{10}s$.
Si verifica il fenomeno di Aliasing? Motivare la risposta.

Esercizio 4

Punteggio: 5 pt
Si consideri lo schema a blocchi in figura:
I) Semplificare lo schema trovando la funzione di trasferimento tra ingresso e uscita



II) Ponendo $A = \frac{1}{s}$, $B = s^2$, $C = \frac{(s-2)(s+1)}{s^2}$, $D = s + 2$ ed $E = \frac{1}{s^2}$, discutere la stabilitá del sistema.
III) Se volessimo moltiplicare il sistema per un polo nell'origine, come risulterebbe la stabilitá del sistema?

Esercizio 5

Punteggio: 5 pt
Dimostrare che se v(t) è reale e ammette la trasformata di Fourier V(f), allora il modulo della trasformata di Fourier V(f) è una funzione pari.

Soluzione - Versione A

Esercizio 1

I) **3pt** - totale **2pt**

$$\begin{cases} -2c_1 + \frac{2}{3}c_2 = 2 \\ 4c_1 + \frac{4}{9}c_2 = -1 \end{cases} \quad \begin{cases} c_1 = -\frac{7}{16} \\ c_2 = \frac{27}{16} \end{cases}$$

$$v_l(k) = c_1(-\frac{1}{2})^k + c_2(\frac{3}{2})^k = -\frac{7}{16}(-\frac{1}{2})^k + \frac{27}{16}(\frac{3}{2})^k$$

II) **2pt** - totale **1pt**

Il sistema non é asintoticamente stabile, a causa della radice $\frac{3}{2}$. Non é nemmeno BIBO stabile, perché non ci sono cancellazioni della FdT.

III)**3pt** - totale **2pt**

$$H(z) = \frac{-\frac{5}{2}z^2 - \frac{3}{4}z}{(z+\frac{1}{2})(z-\frac{3}{2})}$$

$$\frac{H(z)}{z} = \frac{A}{z+\frac{1}{2}} + \frac{B}{z-\frac{3}{2}} = -\frac{1}{4}\frac{1}{z+\frac{1}{2}} - \frac{9}{4}\frac{1}{z-\frac{3}{2}}$$

moltiplico per z e poi anti-trasformo

$$h(t) = -\frac{1}{4}(-\frac{1}{2})^k\delta_{-1}(k) - \frac{9}{4}(\frac{3}{2})^k\delta_{-1}(k)$$

IV) Bisognava fare TUTTO con la trasformata Z. Quindi non bisognava sommare con la risposta libera del punto I. E quindi calcolare le trasformate z del ritardo temporale.

$$U(z) = \frac{z}{z+\frac{1}{2}}$$

$$(z^2 - z - \frac{3}{4})V(z) - 2z^2 - \frac{3}{4}(-z^2 + 2z) = (-\frac{5}{2}z^2 - \frac{3}{4}z)U(z)$$

$$V(z) = \frac{(-\frac{5}{2}z^2 - \frac{3}{4}z) + (\frac{5}{4}z^2 + \frac{3}{2}z)(z+\frac{1}{2})}{(z+\frac{1}{2})^2(z-\frac{3}{2})} = \frac{-\frac{5}{4}z^3 + \frac{11}{8}z^2 + \frac{3}{4}z}{(z+\frac{1}{2})^2(z-\frac{3}{2})}$$

Divido per z, risolvo la scomposizione in fratti semplici. Attenzione alla molteplicitá della radice $-\frac{1}{2}$ che comporta la moltiplicazione di K nell'antitrasformata.

Esercizio 2

I) Riporto la funzione di trasferimento in forma di Bode:

$$G(s) = \frac{10(s^2+4)}{s(s+3)(s^2+3s+4)}$$

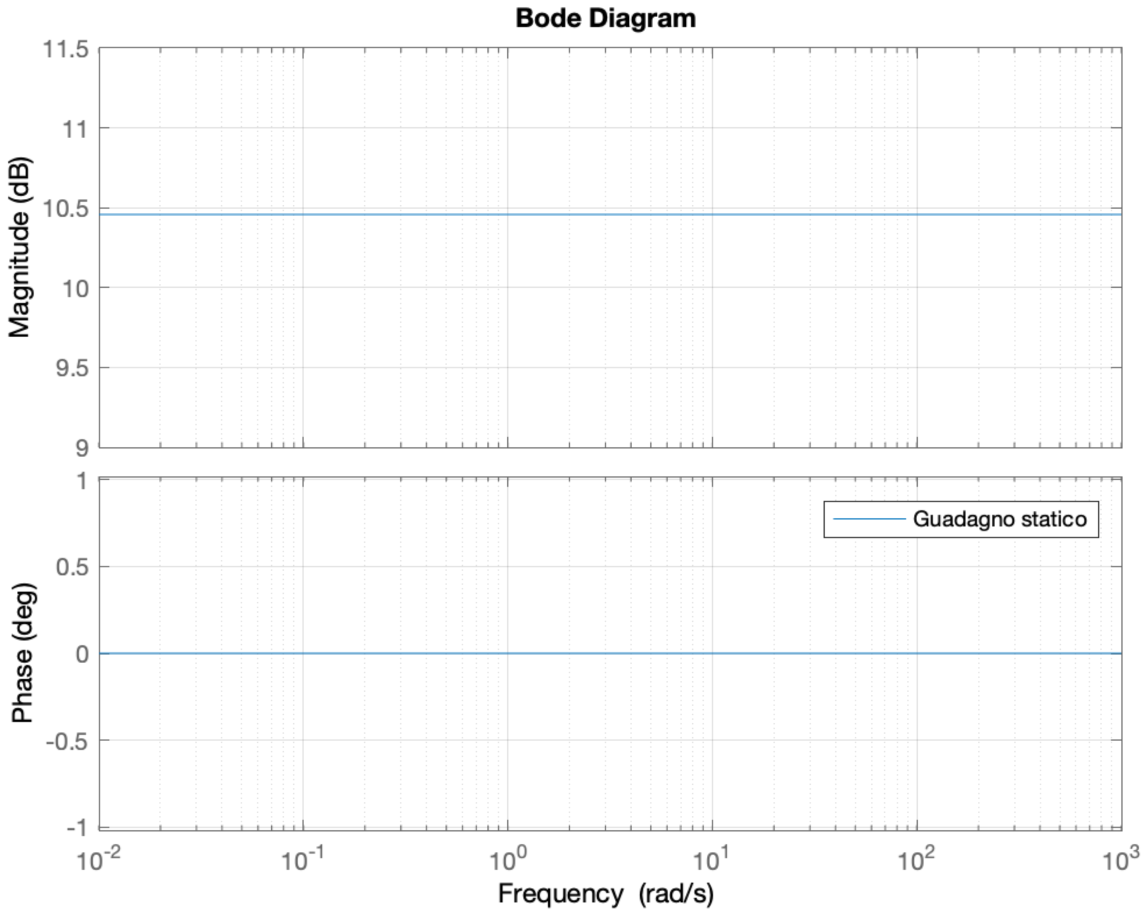
$$G(s) = \frac{10}{s}\frac{4(1+\frac{s^2}{4})}{3(1+\frac{s}{3})4(1+\frac{3}{4}s+\frac{s^2}{4})}$$

$$G(s) = \frac{10}{3}\frac{1}{s}\frac{1+\frac{s^2}{4}}{(1+\frac{s}{3})(1+\frac{3}{4}s+\frac{s^2}{4})}$$

Punteggio: FdT in forma di Bode corretta = 1pt (Esame totale: 0.5)

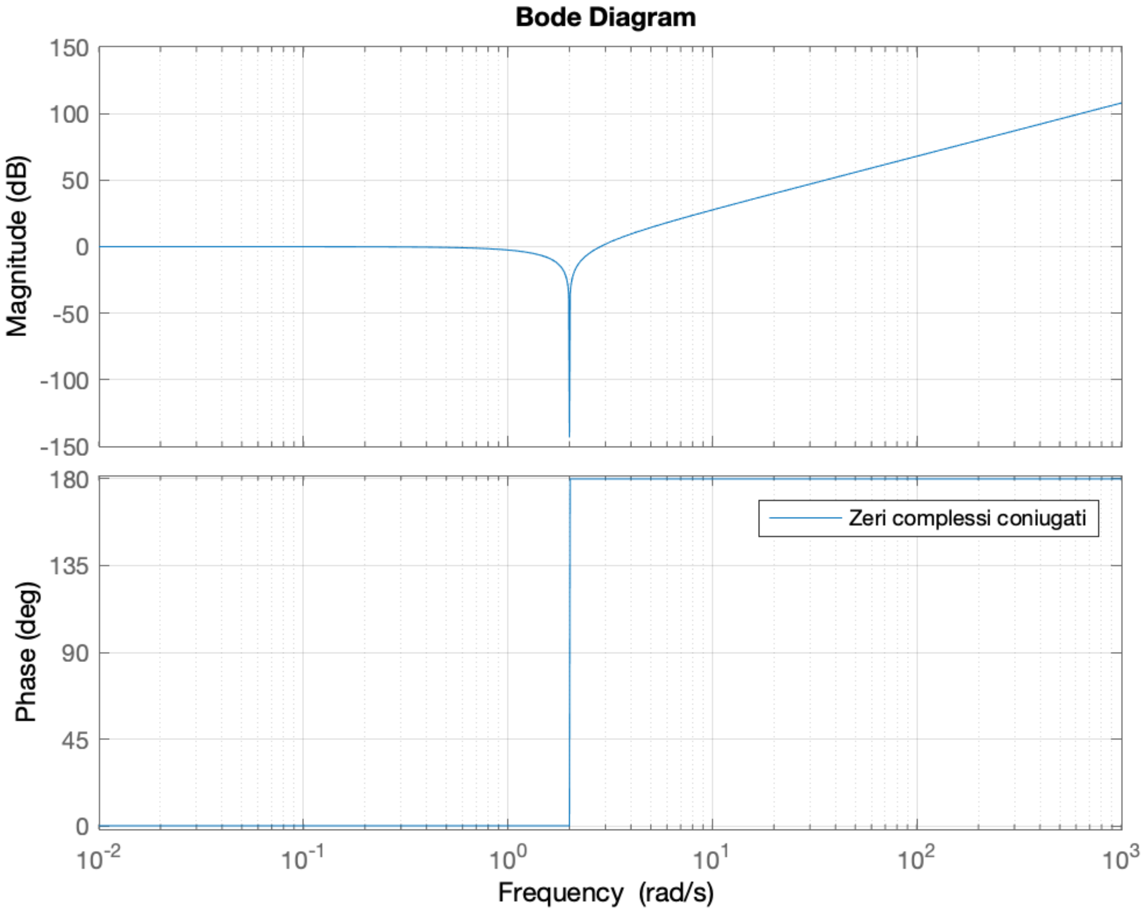
1) 10/3

$|G|_{dB} = 20log_{10}(10/3) = 10.45$
$\angle G = 0°$
Punteggio: 1pt (Esame totale: 0.5)



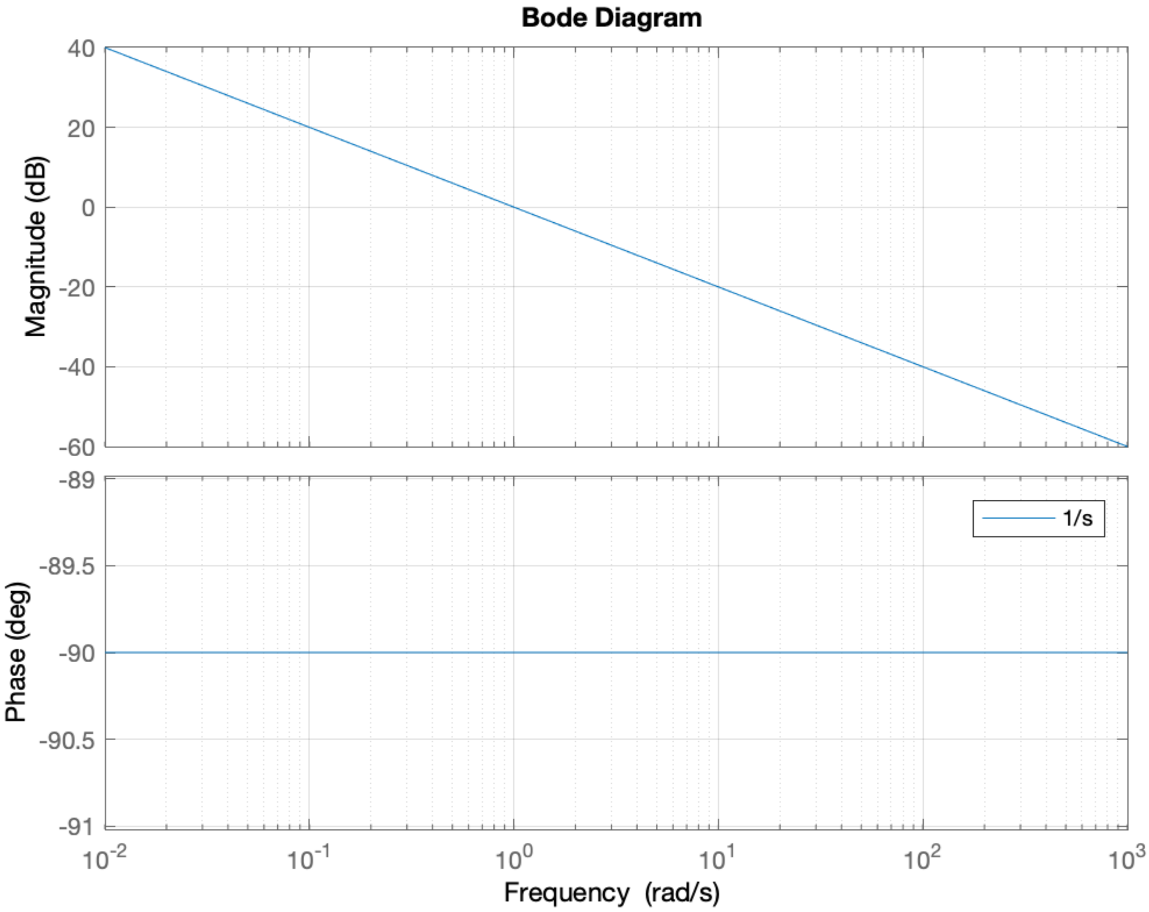
2) $\frac{s^2}{4} + 1$

$\omega_n^2 = 4$ quindi $\omega_n = 2$
A partire da ω_n si ha:
$|G|_{dB} = +40dB/dec$
$\angle G = 180°$
Punteggio: 1pt (Esame totale: 1)



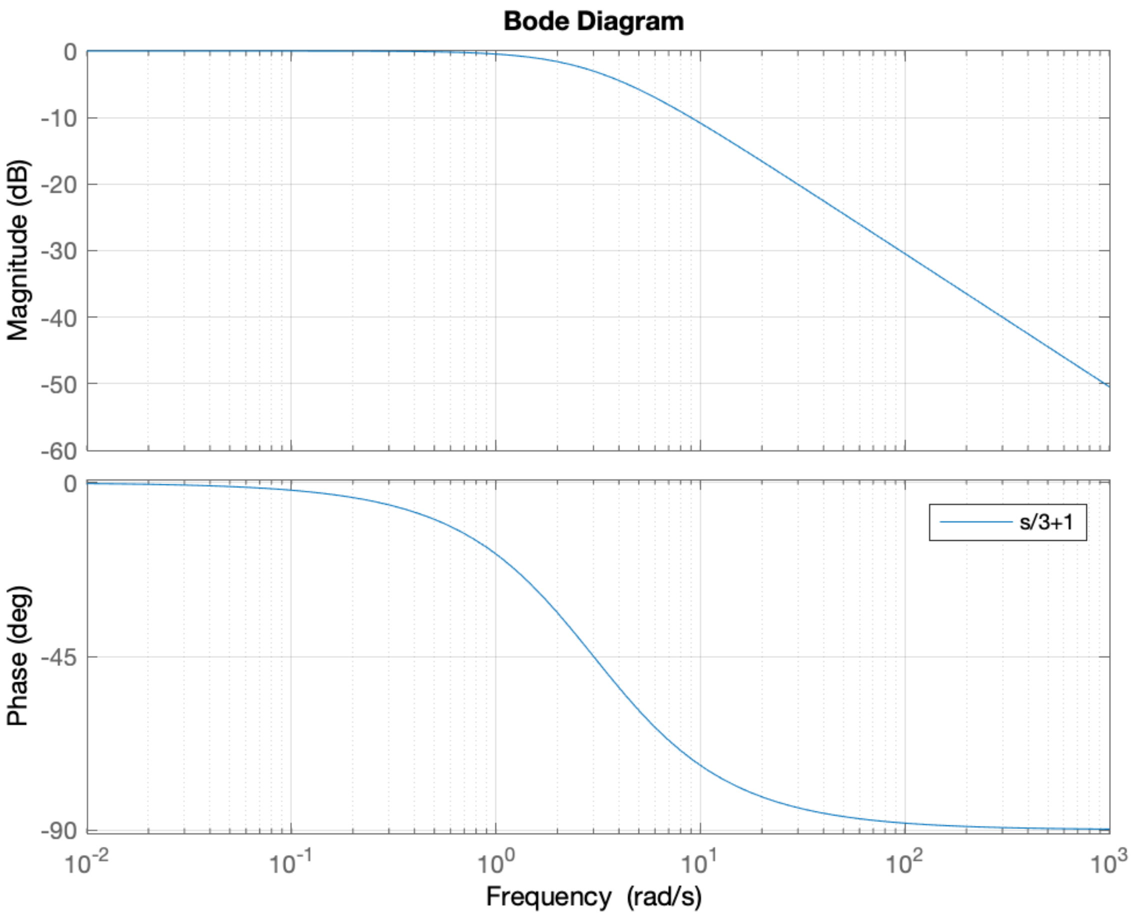
4) 1/s

Polo nell'origine con molteplicità 1.
$|G|_{dB} = -20dB/dec$
$\angle G = -90°$
Punteggio: 1pt (Esame totale: 0.5)



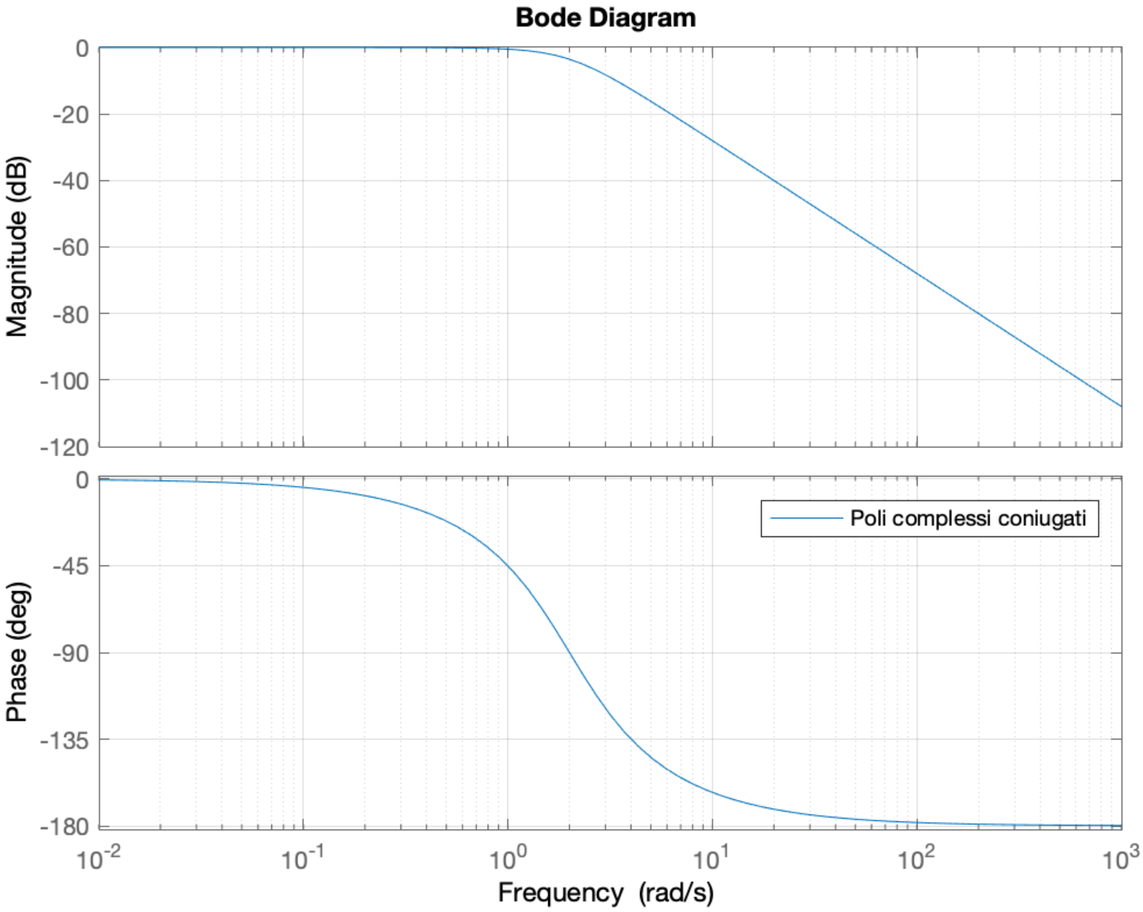
4) $1/(\frac{s}{3}+1)$

$\tau = \frac{1}{3}$ quindi $\omega_n = 3$
A partire da ω_n si ha:
$|G|_{dB} = -20dB/dec$
$\angle G = -90°$
Punteggio: 1pt (Esame totale: 0.5)

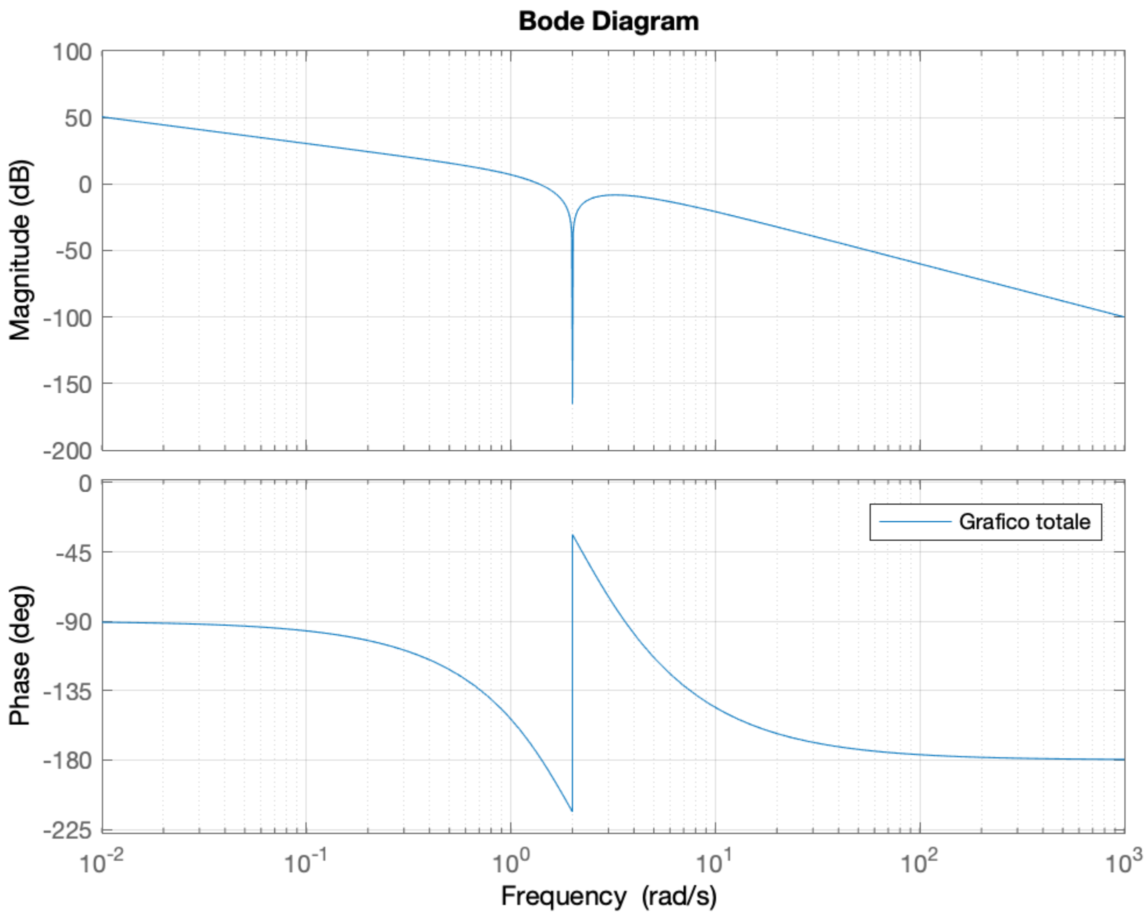


5) Poli complessi coniugati

$\omega_n^2 = 4$ quindi $\omega_n = 2$
A partire da ω_n si ha:
$|G|_{dB} = -40dB/dec$
$\angle G = -180°$
Punteggio: 1pt (Esame totale: 1)



6) Diagramma globale



Punteggio: 2pt (Esame totale: 1)

II) L'espressione generale per poli e zeri complessi coniugati è:

$$1 + 2\zeta \frac{s}{\omega_n} + \frac{s^2}{\omega_n^2}$$

Consideriamo la coppia di zeri complessi coniugati:

$$1 + \frac{s^2}{4}$$

Il fatto che il termine di primo grado non sia presente, significa che lo smorzamento è nullo $\zeta = 0$. Questo implica che:

1. Dato che ci stiamo riferendo ad una coppia di zeri, il digramma reale del modulo avrà un minimo in corrispondenza della pulsazione di risonanza ω_n. In particolare, $\zeta = 0$ rappresenta il caso estremo in cui il diagramma del modulo va all'infinito ($-\infty$, essendo zeri).

2. Per quanto riguarda il diagramma reale della fase, si avrà uno scalino in corrispondenza di ω_n, cioè si osserverà un cambiamento repentino da 0 a 180 gradi.

Punteggio: 1.5pt (0.5 calcolo ζ + 0.5 modulo + 0.5 fase) (Esame totale: 1)

III) Consideriamo la coppia di poli complessi coniugati:

$$1 + \frac{3}{4}s + \frac{s^2}{4}$$

Considerando il termine di secondo grado, si può trovare che $\omega_n^2 = 4$ quindi $\omega_n = 2$. Considerando ora il termine di primo grado, si ha

$$2\zeta \, \frac{1}{\omega_n} = \frac{3}{4}$$

$$2\zeta \, \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$$

$$\zeta = \frac{3}{4} = 0.75$$

Lo smorzamento appartiene al range $\frac{\sqrt{2}}{2} \leq \zeta \leq 1$ e quindi:

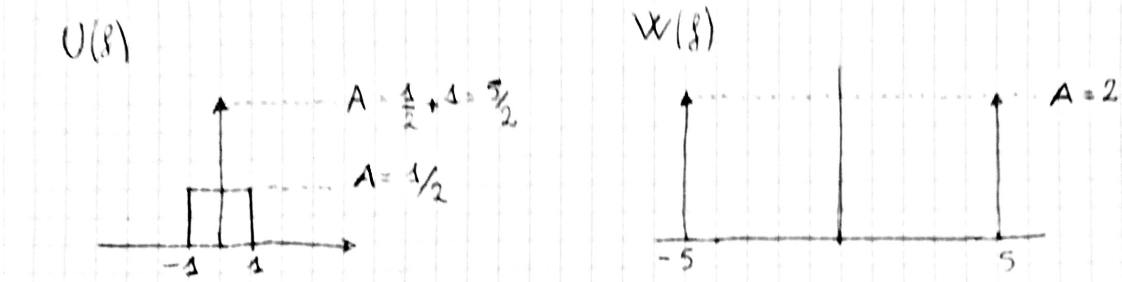
1. Dato che ci stiamo riferendo ad una coppia di poli, il digramma reale del modulo sta tutto sotto la sua approssimazione asintotica.

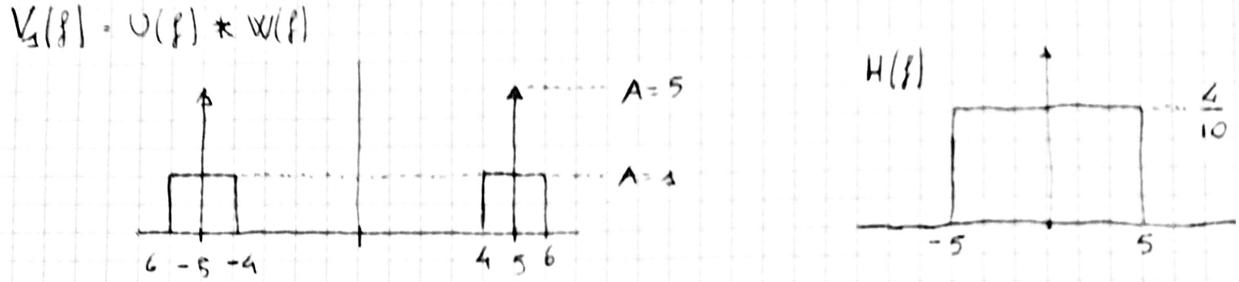
2. Per quanto riguarda il diagramma reale della fase, si avrà un lento cambiamento di pendenza in corrispondenza di ω_n nel passare da 0 a -180 gradi.

Punteggio: 1.5pt (0.5 calcolo ζ + 0.5 modulo + 0.5 fase) (Esame totale: 1)

Esercizio 3

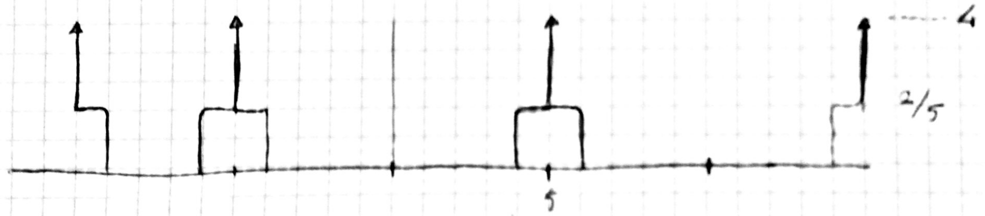
$U(f) = \frac{1}{2}\Pi(\frac{f}{2}) + 2\delta(f)$
$W(f) = 2[\delta(f-5) + \delta(f+5)]$
$H(f) = \frac{4}{10}\Pi(\frac{f}{10})$
$F(f) = \Pi(\frac{f}{2})$
$f_c = 10Hz$

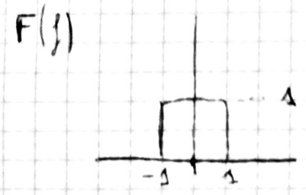




LA FREQUENZA DI CAMPIONAMENTO È 10Hz.

NON RISPETTA LA CONDIZIONE PER NON AVERE ALIASING.



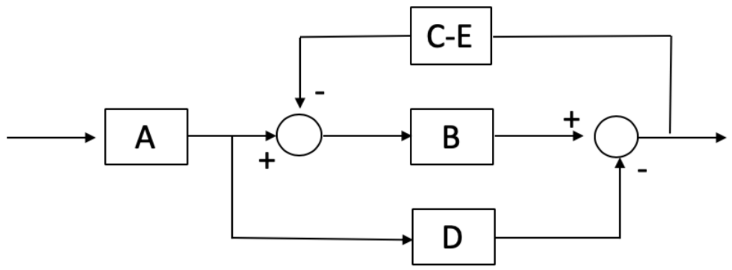


FACENDO LA CONVOLUZIONE DEL SEGNALE REPLICATO, OTTENGO 0.

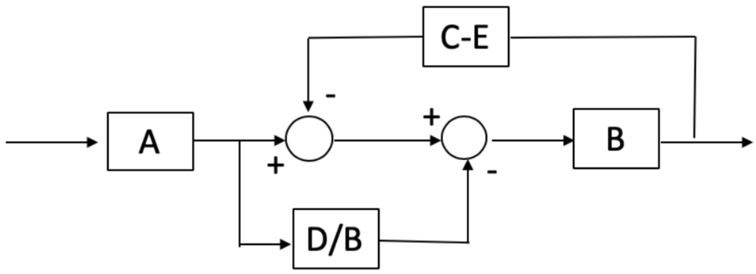
$V(f) = 0 \Leftrightarrow v(t) = 0.$

Esercizio 4

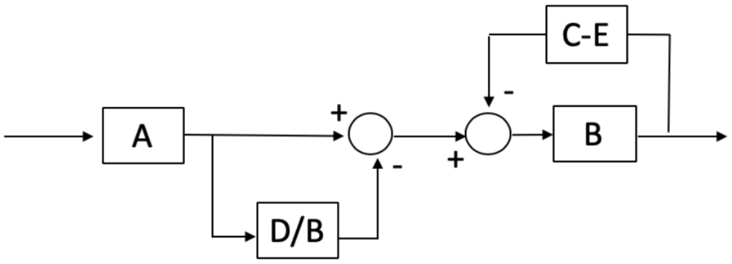
Schemi a blocchi



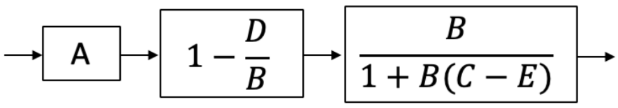
Parallelo C ed E



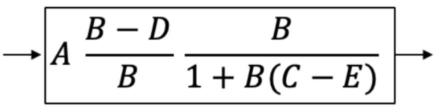
Spostamento del nodo a monte di B



Inversione dei nodi

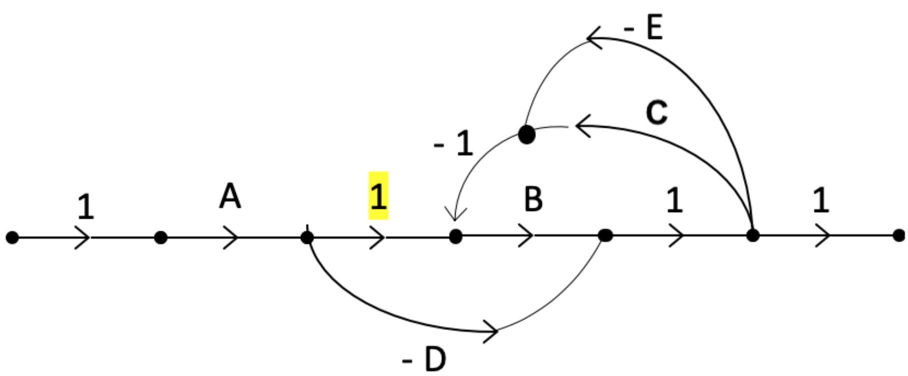


Parallelo e retroazione



Funzione di trasferimento totale:
$T = \frac{A(B-D)}{1-BE+BC}$

Diagrammi di flusso



Cammini aperti:
$P_1 = AB$

$P_2 = -AD$

Anelli singoli:
$P_{11} = -BC$
$P_{21} = BE$

Coppie di anelli che non si toccano: nessuna

Delta:
$\Delta = 1 - (BE - BC) = 1 - BE + BC$
$\Delta_1 = 1 - \cancel{BE} + \cancel{BC}$
$\Delta_2 = 1 - \cancel{BE} + \cancel{BC}$

Trasmittanza totale:
$T = \frac{AB-AD}{1-BE+BC}$

Punteggio: 3.5 punti

II) Sostituisco i valori all'interno della funzione di trasferimento ottenuta $T = \frac{A(B-D)}{1-BE+BC}$.

$$T(s) = \frac{1}{s} \frac{s^2 - s - 2}{1 - s^2 \frac{1}{s^2} + s^2 \frac{(s-2)(s+1)}{s^2}}$$

$$T(s) = \frac{1}{s} \frac{s^2 - s - 2}{1 - \cancel{s^2} \frac{1}{\cancel{s^2}} + \cancel{s^2} \frac{(s-2)(s+1)}{\cancel{s^2}}}$$

$$T(s) = \frac{1}{s} \frac{s^2 - s - 2}{1 - 1 + (s-2)(s+1)}$$

$$T(s) = \frac{1}{s} \frac{(s-2)(s+1)}{(s-2)(s+1)}$$

Il sistema non è asintoticamente stabile, perché ho un polo nell'origine e un polo positivo ($s = 2$). Dopo le varie semplificazioni notiamo che rimane solo un polo all'origine di molteplicitá 1, ($p_1 = 0, \mu = 1$). Questo comporta che il sistema é **semplicemente stabile**.

Punteggio: 1 pt
III) Aggiungendo un polo nell'origine otteniamo:

$$T(s) = \frac{1}{s^2}$$

Abbiamo quindi due poli nell'origine $p_1 = 0, \mu = 2$, il che rende il sistema **instabile**.

Punteggio: 0.5 pt

Esercizio 5
$|V(-f)| = |\int_{-\infty}^{\infty} v(t) e^{j2\pi ft} dt| = \int_{-\infty}^{\infty} |v(t) e^{j2\pi ft}| dt = \int_{-\infty}^{\infty} |v(t)||e^{j2\pi ft}| d = \int_{-\infty}^{\infty} |v(t)||e^{-j2\pi ft}| dt =$
$= \int_{-\infty}^{\infty} |v(t) e^{-j2\pi ft}| dt = |\int_{-\infty}^{\infty} v(t) e^{-j2\pi ft} dt| = |V(f)|$
dove si è sfruttato il fatto che $|e^{j2\pi ft}| = |e^{-j2\pi ft}|$ in quanto numeri complessi coniugati.