TOPOLOGIA E GEOMETRIA DIFFERENZIALE

Programma ufficiale a.a. 2010/11

Prof. Mauro Spera e Dott. Nicola Sansonetto
Dipartimento di Informatica - Università degli Studi di Verona

1. Elementi di algebra multilineare. Spazi duali. Prodotti scalari e isomorfismi musicali (teorema della rappresentazione). Omomorfismi duali. Covarianza e contravarianza. k-forme algebriche. Prodotto esterno (wedge). Algebra di Grassmann.

2. Campi vettoriali e forme differenziali su $\mathbf{R}^n$. Calcolo di Cartan: prodotto esterno (wedge), differenziale esterno, pull-back. Forme chiuse e forme esatte. Coomologia di de Rham (prologo). Lemma di Poincaré. Forma angolare. Esempi di forme chiuse non esatte tratti dalla fisica. Cenno alla coomologia a supporto compatto. Funzioni a campana (o cunetta).

3. Teoria delle superficie e calcolo di Cartan. Il metodo del *repère mobile*. Equazioni di struttura di Cartan. Il Theorema Egregium.

4. Campi vettoriali planari. Punti critici. Indice di un punto critico. Indice di un campo vettoriale. *Umlaufsatz* di Hopf e teorema di Poincaré-Bendixon. Principio dell'argomento in analisi complessa e applicazioni. Il teorema fondamentale dell'algebra.

5. Il teorema di Gauss-Bonnet nell'approccio di Chern. Teorema di Poincaré-Hopf. Teorema di Euler-Poincaré. Teorema di Brouwer.

6. Sottovarieta' di $\mathbf{R}^N$. Rivisitazione della teoria del Dini. Esempi.

7. Le superficie parametrizzate rivisitate. Varietà topologiche. Varietà differenziabili. Esempi: $\mathbf{R}^n$, sfere, spazi proiettivi reali e complessi, Grassmanniane. La sfera di Riemann-Poincaré-Bloch. Struttura topologica degli spazi proiettivi complessi (applicazione della teoria di Morse).

8. Partizioni lisce dell'unità. Vettori tangenti. Fibrato tangente e cotangente. Campi vettoriali e forme differenziali. Diffeomorfismi.

9. Parentesi di Lie di campi vettoriali. Algebre di Lie. Esempi. Flussi di campi vettoriali. Completezza. Lemma di fuga. Derivata di Lie di campi vettoriali ("del pescatore").

10. Gruppi di Lie e loro algebre di Lie. Rappresentazioni aggiunte. Esempi. Digressione: $SU(2)$ e $SO(3)$. Matrici di Pauli. Angoli di Eulero.

11. Analisi tensoriale. Prodotto tensoriale di spazi vettoriali. Tensori e campi tensoriali. Covarianza e contravarianza. Esempi: tensori metrici. Derivata di Lie di campi tensoriali. Calcolo di Cartan su varietà. Differenziale esterno, contrazione, derivata di Lie. La "formula magica"di Cartan. Esempi vari. Digressione meccanica: varietà simplettiche, campi vettoriali Hamiltoniani; parentesi di Poisson. Integrali del moto. L'oscillatore armonico. Cenno ai sistemi completamente integrabili.

12. Il teoremi della funzione inversa, del rango, della funzione implicita per le varietà. k-fette e carte-fetta (slice charts). Immersioni (immersions), inclusioni (embeddings). Esempi vari. Sottogruppi di gruppi di Lie. Teorema di Frobenius. Reinterpretazione in termini di forme differenziali. Applicazioni alla meccanica.

13. Il teorema della varietà quoziente. Spazi topologici quozienti (richiami). Proiezioni aperte. Condizione di Hausdorff per i quozienti. Esempi e Applicazioni. Azioni di gruppi di Lie. Azioni libere, azioni proprie. Il teorema della varietà quoziente: enunciato e schema della dimostrazione. Spazi omogenei.

14. Il teorema di Stokes. Varietà orientabili. Varietà con bordo. Orientamento indotto sul bordo. Integrazione di forme differenziali. Teorema di Stokes.

15. Omologia e coomologia. Omologia singolare. Elementi di algebra omologica: complessi di catene e loro (co)omologia. Successioni esatte corte e successioni esatte lunghe in coomologia. Caratteristica di Euler-Poincaré. Successione e principio di Mayer-Vietoris per la coomologia di de Rham. Applicazioni. Teorema di de Rham (enunciato). Dualità di Poincaré (enunciato). Grado di un'applicazione. Applicazioni: teorema di Gauss-Bonnet; numero di avvolgimento di due curve spaziali chiuse (formula di Gauss). Cenno all'invariante di Hopf (elicità).

16. Elementi di geometria riemanniana. Connessione di Levi-Civita e trasporto parallelo. Geodetiche e loro caratterizzazione variazionale. L'applicazione esponenziale e il lemma di Gauss. Tensori di curvatura (di Riemann, sezionale, Ricci, scalare). Simmetrie del tensore di curvatura. Identità di Bianchi. La curvatura di Riemann è determinata dalla curvatura sezionale. Metriche biinvarianti su gruppi di Lie.

Gruppo fondamentale (Dott. N. Sansonetto)

Introduzione alla topologia algebrica: omotopia e omotopia relativa, con esempi, equivalenza omotopica e tipo di omotopia. Spazi contraibili. Retratti di deformazione forte. Cammini omotopi relativamente al bordo e cammino prodotto sulla classe dei cammini equivalenti. I gruppoide fondamentale. Il gruppo fondamentale di uno spazio topologico puntato e sua dipendenza dal punto base. Esempi: il gruppo fondamentale di un sottoinsieme convesso di uno spazio vettoriale topologico. La semplice connessione: alcuni risultati notevoli. Morfismi indotti da funzioni continue tra spazi topologici puntati.

Richiami sulle funzioni olomorfe. 1-forme olomorfe e omotopia. L'indice di avvolgimento. Il gruppo fondamentale del cerchio. Applicazioni: il teorema del punto fisso di Brouwer in dimensione 2, il teorema fondamentale dell'algebra e il teorema di Borsuk-Ulam in dimensione 2. Introduzione alla classificazione delle superfici.

Ripasso di teoria dei gruppi: gruppi liberi e prodotti liberi di gruppi. Il teorema di Seifert-Van Kempen e corollari. La somma connessa e il gruppo fondamentale del bouquet di due cerchi. Applicazioni del teorema di Seifert-Van Kampen, il gruppo fondamentale del toro. del piano proiettivo reale, della somma connessa di tori e di piani proiettivi reali. Triangolazione di superfici topologiche e caratteristica di Eulero. Il teorema di Poincare' in dimensione 2.

Il programma del corso è interamente contenuto in:

M.SPERA "Topologia e geometria differenziale" [note manoscritte I-XLIII, A1-8 reperibili in rete sulla pagina web del corso], cui vanno aggiunte le note del Dott. N. Sansonetto. Si segnalano però, per i dovuti approfondimenti, i seguenti testi.

Bibliografia

V.I. ARNOLD, Méthodes Mathématiques de la Méchanique Classique, MIR, Moscou, 1976.

D. BACHMAN, A Geometric Approach to Differential Forms, Birkhäuser, Boston, 2006.

W. BOOTHBY, An introduction to differentiable manifolds and Riemannian geometry, Academic Press, New York, 1975.

R. BOTT, L.T. TU, Differential forms in algebraic topology Springer, New York, 1982.

G. BREDON, Topology and Geometry, Springer, New York, 1992.

F.CROOM, A first course in Algebraic Topology, Springer, 1977.

S.S. CHERN, Complex manifolds without potential theory, Springer-Verlag, Berlin, 1979.

S.S. CHERN, H. CHEN, K.S. LAM, Lectures on differential geometry, World Scientific, Singapore, 2000.

M. DO CARMO, Riemannian Geometry, Birkhauser, Boston, 1992.

M. DO CARMO, Differential Forms and Applications, Springer, Berlin, 1994.

B.DUBROVIN, A.FOMENKO, S. NOVIKOV, Géométrie Contemporaine, (3 vol.) MIR, Moscou, 1982

A.T. FOMENKO, T.L. KUNII, Topological Modeling for Visualization. Springer-Verlag, 1997.

J. GALLIER, Geometric Methods and Applications for Computer Science and Engineering,
Springer, Berlin, 2000.

S. GALLOT, D. HULIN, J. LAFONTAINE , Riemannian Geometry, Springer, 1987.

G. GENTILI, F. PODESTA', E. VESENTINI, Lezioni di geometria differenziale. Bollati-Boringhieri, Torino, 1995.

S. GOLDBERG, Curvature and Homology, Dover, New York, 1962.

P. GRIFFITHS, J. HARRIS, Principles of Algebraic Geometry, Wiley, New York, 1978.

A. HATCHER, Algebraic Topology (scaricabile liberamente dalla pagina web dell'autore)

K. JÄNICH, Topologia, Zanichelli, Bologna, 1994

J. KELLEY, General topology Springer, New York, 1955

F.KIRWAN, Complex algebraic curves LMS, London, 1992

S. LANG, Fundamentals of Differential Geometry, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1999.

J.M. LEE,, Introduction to Topological Manifolds, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 2000.

J.M. LEE, Introduction to Smooth manifolds, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 2003.

W. LUECK, Algebraische Topologie, Vieweg-Verlag, Wiesbaden, 2005.

W.MASSEY, Algebraic Topology: An Introduction, Springer, Berlin, 1969.

E. SERNESI, Geometria 2 Bollati Boringhieri, Torino, 1994.

I.M. SINGER, J.A. THORPE Lezioni di topologia elementare e di geometria, Boringhieri, Torino, 1980.

M.SPERA "Geometria" [note manoscritte reperibili in rete sulla pagina web del corso di Geometria 2008/09], "Elementi di Topologia" [note manoscritte reperibili in rete sulla pagina web del relativo corso di dottorato in Informatica 2008/09]

M.SPERA "Geometria superiore-I modulo" (UCSC Brescia a.a. 1998/99), "Topologia-modulo B" - Padova a.a 1995/96 — 97/98 [note manoscritte]