

Sistemi - Modulo di Sistemi a Eventi Discreti

Discrete Event and Hybrid Systems

Laurea Magistrale in Ingegneria Informatica per Robotica e Industria Intelligente
Master's degree in Computer Engineering for Robotics and Smart Industry
Tiziano Villa

6 Settembre 2022

Nome e Cognome:

Matricola:

Posta elettronica:

problema	punti massimi	i tuoi punti
problema 1a-f	20	
problema 1g-i	10	
totale	30	

1. Si considerino i due seguenti automi definiti sull'alfabeto $E = \{a_1, a_2, b_1, b_2\}$.

Consider the two following automata over alphabet $E = \{a_1, a_2, b_1, b_2\}$.

Automa (automaton) G (impianto = plant):

- stati (states): 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 con 0 stato iniziale e 8 unico stato accettante (with 0 initial state and 8 unique accepting state);
- transizione da 0 a 1: a_1 ,
(transition from 0 to 1: a_1 ,)
transizione da 0 a 3: a_2 ,
transizione da 1 a 2: b_1 ,
transizione da 1 a 4: a_2 ,
transizione da 2 a 5: a_2 ,
transizione da 3 a 4: a_1 ,
transizione da 3 a 6: b_2 ,
transizione da 4 a 5: b_1 ,
transizione da 4 a 7: b_2 ,
transizione da 5 a 8: b_2 ,
transizione da 6 a 7: a_1 ,
transizione da 7 a 8: b_1 .

Automa (automaton) H_a (specifica = specification):

- stati (states): 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 con 0 stato iniziale e 8 unico stato accettante (with 0 initial state and 8 unique accepting state);
- transizione da 0 a 1: a_1 ,
(transition from 0 to 1: a_1 ,)
transizione da 0 a 3: a_2 ,
transizione da 1 a 2: b_1 ,
transizione da 1 a 9: a_2 ,
transizione da 2 a 5: a_2 ,
transizione da 3 a 4: a_1 ,
transizione da 3 a 6: b_2 ,
transizione da 4 a 7: b_2 ,
transizione da 5 a 8: b_2 ,
transizione da 6 a 7: a_1 ,
transizione da 7 a 8: b_1 ,
transizione da 9 a 5: b_1 .

- (a) Si disegnino i grafi dei due automi.
Draw the graphs of the two automata.

- (b) Dati i linguaggi K e $M = \overline{M}$ sull'alfabeto E . Siano $E_c \subseteq E$ e $E_o \subseteq E$. Sia P la proiezione naturale da E^* a E_o^* .

Si scriva la definizione di osservabilit  di K rispetto a M , E_c ed E_o .

Consider the languages K and $M = \overline{M}$ over alphabet E , and the set of events $E_c \subseteq E$ and $E_o \subseteq E$. Let P be the natural projection from E^* to E_o^* .

Write the definition of observability of K with respect to M , E_c and E_o .

Traccia di soluzione.

Definizione Siano K e $M = \overline{M}$ linguaggi sull'alfabeto di eventi E . Sia $E_c \subseteq E$ l'insieme degli eventi controllabili. Sia $E_o \subseteq E$ l'insieme degli eventi osservabili con P la proiezione da E^* a E_o^* .

Si dice che K   osservabile rispetto a M , P , E_c , se per tutte le stringhe $s \in \overline{K}$ e per tutti gli eventi $\sigma \in E_c$,

$$s\sigma \notin \overline{K} \wedge s\sigma \in M \Rightarrow P^{-1}[P(s)]\{\sigma\} \cap \overline{K} = \emptyset.$$

- (c) Siano $M = \mathcal{L}(G)$ e $K = \mathcal{L}_m(H_a)$.

Siano $E_{uo} = \{a_2\}$ e $E_{uc} = \emptyset$.

K   osservabile rispetto a M , E_c ed E_o ? Lo si verifichi usando la definizione.

Let $M = \mathcal{L}(G)$ and $K = \mathcal{L}_m(H_a)$.

Let $E_{uo} = \{a_2\}$ and $E_{uc} = \emptyset$.

K is observable with respect to M , E_c and E_o ? Verify it using the definition of observability.

Traccia di soluzione.

Si ha $\overline{K} = \overline{\{a_2b_2a_1b_1, a_2a_1b_2b_1, a_1b_1a_2b_2, a_1a_2b_1b_2\}}$. Si consideri la stringa $s = a_2a_1$ e $\sigma = b_1$, allora si ha che $a_2a_1b_1 \notin \overline{K}$, ma $a_2a_1b_1 \in M$; inoltre $P(s) = a_1$, $P^{-1}[P(s)]\{\sigma\} = \{a_2^*a_1a_2^*b_1\}$, perci  $P^{-1}[P(s)]\{\sigma\} \cap \overline{K} = \{a_2^*a_1a_2^*b_1\} \cap \overline{K} = \{a_1a_2b_1\} \neq \emptyset$ il che falsifica la condizione di osservabilit .

Un altro controesempio speculare al precedente si ottiene con la stringa $s = a_1a_2$ e $\sigma = b_2$. Ovviamente basta trovare un controesempio per stabilire che non vale l'osservabilit .

Intuitivamente, dopo aver visto a_2a_1 il controllore dovrebbe disabilitare b_1 e abilitare b_2 , mentre dopo aver visto a_1a_2 il controllore dovrebbe abilitare b_1 e disabilitare b_2 , ma per l'inosservabilit  di a_2 il controllore non

e' in grado di distinguere a_2a_1 da a_1a_2 (vede la loro proiezione comune come a_1), e quindi non sa che azione intraprendere dopo aver visto a_1 .

(d) Si costruisca $H_{a,obs}$, l'automa osservatore di H_a .

Build $H_{a,obs}$, the observer automaton of H_a .

Traccia di soluzione.

Nell'automa H_a si sostituisce a_2 con ϵ e poi si applica l'algoritmo per determinizzare mediante la ϵ -chiusura. Si veda l'automa $H_{a,obs}$ risultante in allegato.

(e) Si risponda alla domanda del punto precedente sull'osservabilit  utilizzando l'automa osservatore. Si spieghi con chiarezza il procedimento.

Answer the previous question about observability by means of the observer automaton. Explain in detail the procedure.

Traccia di soluzione.

Si esaminano gli stati di $H_{a,obs}$ per verificare se ce n'  almeno uno che testimonia un conflitto di controllo. Nel caso specifico, lo stato $\{1, 4, 9\}$ testimonia tale conflitto, poich  l'azione di controllo nello stato 4 di H_a richiede l'abilitazione dell'evento b_2 e la disabilitazione dell'evento b_1 , che   esattamente l'opposto di quanto richiesto nello stato 9. La presenza di tale conflitto di controllo in $H_{a,obs}$ indica che K non   osservabile.

- (f) Si restringa il comportamento dell'impianto rappresentato da G , applicandogli l'azione di controllo del seguente supervisore S_B : all'inizio abilita solo a_1 , poi dopo aver visto a_1 abilita a_2 e b_1 (e disabilita b_2), e infine dopo aver visto ancora b_1 abilita a_2 e b_2 .

Sia $H_{B,a}$ l'automa che rappresenta tale comportamento ristretto dell'impianto G sotto il controllo del supervisore S_B , cioè sia K_B la nuova specifica del comportamento ammissibile, dove $K_B = \mathcal{L}_m(H_{B,a}) = \mathcal{L}_m(S_B/G)$.

Si risponda alle seguenti domande. Nota bene: in tutti gli automi s'indichino con chiarezza gli stati accettanti.

Restrict the plant behaviour represented by G , by the control action of the following supervisor S_B : at the beginning enable only a_1 , then after having seen a_1 enable a_2 and b_1 (and disable b_2), and finally after having seen again b_1 enable a_2 and b_2 .

Let $H_{B,a}$ be the automaton representing the restricted behaviour of the plant G under the control action of the supervisor S_B , i.e., let K_B be the new specification of the admissible behaviour. where $K_B = \mathcal{L}_m(H_{B,a}) = \mathcal{L}_m(S_B/G)$.

Answer the following questions. Please, mark clearly the accepting states in all automata.

- i. Si discuta intuitivamente questa politica di controllo. Quali stringhe marcate dell'impianto sono permesse da essa ?

Explain qualitatively this control policy. What are the marked strings of the plant that are admitted by this control policy ?

Traccia di soluzione.

Abbiamo dimostrato formalmente che non vale l'osservabilità. Intuitivamente perché non vale ? Se il supervisore all'inizio abilitasse sia a_1 che a_2 , e poi si osservasse a_1 . allora non si saprebbe se l'impianto è nello stato 1 o 4 e nel secondo caso non si saprebbe se è arrivato a 4 dal cammino a_1a_2 (che richiederebbe di disabilitare b_2) o da a_2a_1 (che richiederebbe di disabilitare b_1). Quindi non si saprebbe che politica di controllo attuare a questo punto. Per produrre un sottoinsieme della specifica ammissibile proposta (senza produrre stringhe fuori specifica e senza che l'impianto si blocchi), il supervisore all'inizio può abilitare solamente uno dei due eventi a_1 e a_2 , ma non entrambi. Il supervisore S_B sceglie di abilitare solo a_1 .

Le due stringhe marcate permesse sotto controllo sono $a_1a_2b_1b_2$ e

$a_1b_1a_2b_2$.

ii. Si disegni l'automa $H_{B,a}$.

Draw the automaton $H_{B,a}$.

Traccia di soluzione.

Si disegni l'automa che marca le due stringhe $a_1a_2b_1b_2$ e $a_1b_1a_2b_2$. Si veda la figura nell'allegato.

iii. Si disegni $H_{B,a,obs}$, l'automa osservatore di $H_{B,a}$.

Draw $H_{B,a,obs}$, the observer automaton of $H_{B,a}$.

Traccia di soluzione.

Si disegni l'automa osservatore ottenuto dalla determinizzazione del precedente, in cui si è posto $a_2 = \epsilon$. Si veda la figura nell'allegato.

(g) Si scriva la definizione di linguaggio normale.

Dati i linguaggi K e $M = \overline{M}$ sull'alfabeto E , sia P la proiezione naturale da E^* a E_o^* .

Si scriva la definizione di normalita' di K rispetto a M , P , e se ne dia un'interpretazione intuitiva.

Write the definition of normal language.

Given the languages K and $M = \overline{M}$ on the alphabet E , let P be the natural projection from E^* to E_o^* .

Write the definition of normality of K with respect to M , P , and provide an intuitive interpretation.

Traccia di soluzione.

Un linguaggio $K \subseteq M$ si dice normale rispetto a M e P se

$$\overline{K} = P^{-1}[P(\overline{K})] \cap M.$$

La proprieta' di normalita' significa che M si puo' ricostruire esattamente dalla sua proiezione $P(\overline{K})$ e da M .

Si noti che, come per controllabilita' ed osservabilita', K e' normale se e solo se \overline{K} e' normale.

Si noti che $\overline{K} \subseteq P^{-1}[P(\overline{K})] \cap M$ vale sempre. Si ha la normalita' quando vale anche l'altra disuguaglianza $\overline{K} \supseteq P^{-1}[P(\overline{K})] \cap M$.

(h) Il linguaggio $L_B = \{a_1b_1a_2b_2, a_1a_2b_1b_2\}$ marcato dalla soluzione di S_B e' normale ?

Is $L_B = \{a_1b_1a_2b_2, a_1a_2b_1b_2\}$, the marked language of the solution of S_B , normal ?

Si deve verificare se vale $\overline{L_B} = P^{-1}[P(\overline{L_B})] \cap M$, in particolare se vale $\overline{L_B} \supseteq P^{-1}[P(\overline{L_B})] \cap M$.

Dati $M = \mathcal{L}(G)$, $E_{uo} = \{a_2\}$, si ha $P(\overline{L_B}) = \{\overline{a_1b_1b_2}\}$, che e' il linguaggio generato dall'osservatore $H_{B,a,obs}$.

Inoltre si ha $a_2 \in P^{-1}[P(\overline{L_B})] \cap M$, poiche' $\epsilon \in P(\overline{L_B}) = \{\overline{a_1b_1b_2}\}$, $a_2 \in P^{-1}[P(\overline{L_B})] = P^{-1}[\{\overline{a_1b_1b_2}\}]$ e $a_2 \in M$. Ma $a_2 \notin \overline{L_B} = \{\overline{a_1b_1a_2b_2}, \overline{a_1a_2b_1b_2}\}$, da cui $\overline{L_B} \not\supseteq P^{-1}[P(\overline{L_B})] \cap M$.

Si conclude che L_B non e' un linguaggio normale.

- (i) Dato il linguaggio $L_B = \{a_1b_1a_2b_2, a_1a_2b_1b_2\}$ della soluzione relativa a S_B , con $E_{uo} = \{a_2\}$, si calcoli il sottolinguaggio normale supremo $L_B^{\uparrow N}$.
 Given the language $L_B = \{a_1b_1a_2b_2, a_1a_2b_1b_2\}$ of the solution related to S_B , with $E_{uo} = \{a_2\}$, compute the supremal normal sublanguage $L_B^{\uparrow N}$.

Traccia di soluzione.

Si e' dimostrato che L_B non e' normale poiche' la stringa inosservabile $a_2 \in M = \mathcal{L}(G)$, ma $a_2 \notin \overline{L_B}$. Percio' bisogna eliminare da L_B tutte le stringhe che contengono un prefisso la cui proiezione e' uguale a quella di a_2 , cioe' bisogna eliminare da L_B tutte le stringhe che contengono il prefisso ϵ , cioe' bisogna eliminare da L_B tutte le stringhe. In conclusione $L_B^{\uparrow N} = \emptyset$. Vale anche $(\overline{L_B})^{\uparrow N} = \emptyset$.

Derivazione piu' formale.

Se K e' chiuso rispetto al prefisso, $K^{\uparrow N} = K \setminus (P^{-1}[P(M \setminus K)])E^*$.

Se K e' generale, si puo' calcolare $K^{\uparrow N}$ come risultato della formula iterativa $K_{i+1} = (\overline{K_i})^{\uparrow N} \cap K$, dove $K_0 = K$.

Nel nostro esempio $K = L_B$ per cui $\overline{L_B}$ e' il caso di base dell'iterazione di cui calcolare $(\overline{L_B})^{\uparrow N}$.

Calcoliamo $(\overline{L_B})^{\uparrow N} = \overline{L_B} \setminus (P^{-1}[P(M \setminus \overline{L_B})])E^*$.

Si ha $M \setminus \overline{L_B} = \overline{\{a_1a_2b_2b_1, a_2a_1b_1b_2, a_2a_1b_2b_1, a_2b_2a_1b_1\}}$,

$P(M \setminus \overline{L_B}) = \overline{\{a_1b_1b_2, a_1b_2b_1, b_2a_1b_1\}}$,

$P^{-1}[P(M \setminus \overline{L_B})] = \overline{\{a_2^*a_1a_2^*b_1a_2^*b_2a_2^*, a_2^*a_1a_2^*b_2a_2^*b_1a_2^*, a_2^*b_2a_2^*a_1a_2^*b_1a_2^*\}}$.

Da $\overline{L_B} \subseteq P^{-1}[P(M \setminus \overline{L_B})]$, segue che $(\overline{L_B})^{\uparrow N} = \overline{L_B} \setminus (P^{-1}[P(M \setminus \overline{L_B})])E^* = \emptyset$ e quindi $L_B^{\uparrow N} = (\overline{L_B})^{\uparrow N} \cap L_B = \emptyset \cap L_B = \emptyset$.