

Sistemi - Modulo di Sistemi a Eventi Discreti

Laurea Magistrale in Ingegneria e Scienze Informatiche
Tiziano Villa

27 Settembre 2018

Nome e Cognome:

Matricola:

Posta elettronica:

problema	punti massimi	i tuoi punti
problema 1	23	
problema 2	7	
totale	30	

1. (a) Si scriva la definizione di sistema reattivo non-deterministico.

Traccia di soluzione.

Si vedano le dispense per la definizione formale. Per ogni segnale d'ingresso, si produce uno o più segnali di uscita.

Esiste una relazione binaria

$SisNonDet \subseteq [Tempo \rightarrow Ingressi] \times [Tempo \rightarrow Uscite]$ tale che
 $\forall x \in [Tempo \rightarrow Ingressi], \exists y \in [Tempo \rightarrow Uscite], (x, y) \in SisNonDet.$

Ogni coppia $(x, y) \in SisNonDet$ è un comportamento.

- (b) Si scriva la definizione di sistema reattivo deterministico.

- (c) Si scriva la definizione di macchina a stati finiti non-deterministica progressiva.

Traccia di soluzione.

Si vedano le dispense per la definizione formale.

La relazione di transizione è definita come

$$Stati \times Ingressi \longrightarrow P(Stati \times Uscite) \setminus \emptyset$$

dove P rappresenta l'insieme potenza. La clausola " $\setminus \emptyset$ " impone che sia progressiva, cioè che la funzione sia definita per ogni ingresso.

- (d) Si scriva la definizione di macchina a stati finiti deterministica progressiva.

- (e) Quali sistemi reattivi non-deterministici possono essere realizzati da macchine a stati non-deterministiche ?

I sistemi reattivi tempo-discreti causali non-deterministici possono essere realizzati da macchine a stati non-deterministiche. I sistemi reattivi tempo-discreti causali a stati finiti non-deterministici possono essere realizzati da macchine a stati finiti non-deterministiche.

- (f) Si considerino le seguenti definizioni

- i. Una macchina a stati finiti non-deterministica si dice *spuria* se per ogni sequenza d'ingresso produce una sola sequenza d'uscita.
- ii. Data una macchina a stati finiti non-deterministica, un suo stato s si dice *quasi deterministico* se per ogni ingresso i esiste un'unica uscita o per tutte le transizioni uscenti da s con l'ingresso i . Una macchina a stati finiti non-deterministica si dice *quasi deterministica* se ogni suo stato s raggiungibile è *quasi deterministico*,

- i. Una macchina a stati finiti non-deterministica spuria e' *quasi deterministica* ? Lo si dimostri o si mostri un controesempio.

Traccia di soluzione.

Si.

Si consideri una MSF non-deterministica spuria. Si assuma per assurdo che un suo stato raggiungibile s non sia quasi-deterministico, per cui esisterebbe un ingresso i per cui s puo' produrre due uscite diverse. Poiche' s e' raggiungibile dallo stato iniziale, ad esempio con la successione d'ingresso σ_i , la MSF produrra' successioni di uscita diverse per la successione d'ingresso $\sigma_i i$, contraddicendo il fatto che la MSF e' non-deterministica spuria e quindi per una data successione d'ingresso puo' produrre una sola successione di uscita.

- ii. Una macchina a stati finiti non-deterministica *quasi deterministica* e' spuria ? Lo si dimostri o si mostri un controesempio.

Traccia di soluzione.

No.

La definizione di quasi deterministica non esclude che ci sia uno stato s dove per una coppia i, o ci siano piu' stati futuri n_1 e n_2 , da cui potrebbero partire sequenze d'ingresso-uscita diverse. Per ottenere l'implicazione in questo verso servirebbero ulteriori condizioni, come ad esempio che i due stati futuri n_1 e n_2 fossero equivalenti, o ancora piu' forte, che la macchina fosse osservabile (cioe' che per ogni tripla i, s, o ci fosse un unico stato d'uscita n).

Controesempio: Macchina M :

- stati: s_a, s_b con s_a stato iniziale;
- transizione da s_a a s_a : $\bullet/1$,
transizione da s_a a s_b : $\bullet/1$,
transizione da s_b a s_a : $\bullet/0$.

M e' quasi deterministica (dato l'unico ingresso \bullet si produce sempre l'uscita 1 in s_a e 0 in s_b), ma per la successione d'ingresso $\bullet \bullet$ si possono produrre le successioni d'uscita 1 1 oppure 1 0 a seconda che l'esecuzione prenda per due volte l'autoanello in s_a oppure percorra il ciclo da s_a a s_b e da s_b ad s_a .

- (g) Si dia la definizione di astrazione, raffinamento ed equivalenza tra sistemi.

Traccia di soluzione.

Il sistema $S1$ raffina il sistema $S2$ se e solo se

- i. $Tempo[S1] = Tempo[S2]$
- ii. $Ingressi[S1] = Ingressi[S2]$
- iii. $Uscite[S1] = Uscite[S2]$
- iv. $Comportamenti[S1] \subseteq Comportamenti[S2]$

Il sistema $S1$ raffina il sistema $S2$ se e solo se il sistema $S2$ astrae il sistema $S1$.

Per l'equivalenza serve $Comportamenti[S1] = Comportamenti[S2]$.

- (h) Si definisca la nozione di simulazione tra due macchine a stati finiti non-deterministiche.

Traccia di soluzione.

Si vedano le dispense per la definizione formale.

Una simulazione e' una relazione $S \subseteq Stati[M_1] \times Stati[M_2]$.

Intuitivamente: per ogni stato iniziale p di M_1 esiste uno stato iniziale q di M_2 con $(p, q) \in S$, e se $(p, q) \in S$, per ogni ingresso i e per ogni stato futuro p' di p c'e' uno stato futuro q' di q tali che p e q sotto i producono la medesima uscita e $(p', q') \in S$.

- (i) Si enunci il teorema sulla relazione tra raffinamento e simulazione di una macchina a stati finiti nondeterministica da parte di una macchina a stati finiti deterministica.

Traccia di soluzione.

Se M_2 e' deterministica, M_1 e' simulata da M_2 se e solo se M_1 e' equivalente a M_2 (e' equivalente se e solo se M_1 raffina M_2 e M_2 raffina M_1).

- (j) Si enunci il teorema sulla relazione tra raffinamento e simulazione di una macchina a stati finiti nondeterministica da parte di una macchina a stati finiti pseudo-nondeterministica.

Traccia di soluzione.

Se M_2 e' pseudo-deterministica, M_1 e' simulata da M_2 se e solo se M_1 raffina M_2 .

(k) Si considerino le macchine a stati finiti seguenti:

Macchina M' :

- stati: $s'_0, s'_1, s'_2, s'_3, s'_4, s'_5$ con s'_0 stato iniziale;
- transizione da s'_0 a s'_1 : $\bullet/1$,
transizione da s'_1 a s'_2 : $\bullet/1$,
transizione da s'_2 a s'_3 : $\bullet/0$,
transizione da s'_3 a s'_4 : $\bullet/1$,
transizione da s'_4 a s'_5 : $\bullet/1$,
transizione da s'_5 a s'_0 : $\bullet/0$.

Macchina M'' :

- stati: s''_0, s''_1, s''_2 con s''_0 stato iniziale;
- transizione da s''_0 a s''_1 : $\bullet/1$,
transizione da s''_1 a s''_2 : $\bullet/1$,
transizione da s''_2 a s''_0 : $\bullet/0$.

Macchina M''' :

- stati: s'''_0, s'''_1 con s'''_0 stato iniziale;
- transizione da s'''_0 a s'''_1 : $\bullet/1$,
transizione da s'''_1 a s'''_1 : $\bullet/1$,
transizione da s'''_1 a s'''_0 : $\bullet/0$.

i. Si disegnino i diagrammi di transizione delle tre macchine.

ii. Si classifichino le macchine rispetto al determinismo.

Traccia di soluzione.

M' e' deterministica.

M'' e' deterministica.

M''' e' pseudo-deterministica.

iii. Si risponda in ordine alle seguenti domande, mostrando per ognuna di esse il procedimento che ha portato alla conclusione e il risultato teorico su cui si basa:

A. M' astrae M'' ?

Traccia di soluzione.

Sì.

In particolare M' e M'' sono equivalenti. Infatti entrambe le macchine hanno un unico comportamento che e' la ripetizione della tripla $\bullet/1, \bullet/1, \bullet/0$. [Si noti che minimizzando gli stati di M' si ottiene M'' .]

B. M'' astrae M' ?

Traccia di soluzione.

Si.

Per quanto detto sopra.

C. M''' astrae M' ?

Traccia di soluzione.

Si.

I comportamenti di M''' sono dati dalla ripetizione della stringa $\bullet/1, (\bullet/1)^*, \bullet/0$ e contengono strettamente l'unico comportamento di M' dato dalla ripetizione di $\bullet/1, \bullet/1, \bullet/0$.

D. M' astrae M''' ?

Traccia di soluzione.

No.

Per quanto detto sopra.

E. M''' astrae M'' ?

Traccia di soluzione.

Si.

Per quanto detto sopra.

F. M'' astrae M''' ?

Traccia di soluzione.

No.

Per quanto detto sopra.

2. Si consideri una rete di Petri marcata (N, M_0) (dove N e' la rete e M_0 e' la marcatura iniziale) e il suo grafo di copertura.

Si consideri la seguente notazione:

- m e' il numero dei posti.
- \mathcal{N} e' l'insieme dei naturali.
- M_ω e' un nodo del grafo di copertura che puo' contenere componenti ω .
- $R(N, M_0)$ l'insieme delle marcature raggiungibili nella rete marcata (N, M_0) .
- Data una marcatura $M \in N^m$, si dice che essa e' ω -coperta da $M_\omega \in \mathcal{N}_\omega^m$ se $M_\omega(p) = M(p)$ per ogni componente p tale che $M_\omega(p) \neq \omega$, e si denota come $M_\omega \geq_\omega M$.

Avvertenza:

- (a) (A) e' condizione necessaria per (B) se vale $(B) \Rightarrow (A)$, denotato anche come $(A) \Leftarrow (B)$ e letto come (A) e' implicato da (B) oppure (B) implica (A).
- (b) (A) e' condizione sufficiente per (B) se vale $(A) \Rightarrow (B)$ letto come (A) implica (B).
- (c) (A) e' condizione necessaria e sufficiente per (B) se valgono contemporaneamente $(A) \Rightarrow (B)$ e $(B) \Rightarrow (A)$, denotato anche come $(A) \Leftrightarrow (B)$ e letto come (A) implica (B) e (B) implica (A).

(a) Date le proposizioni

- (A) La marcatura M e' raggiungibile
- (B) esiste nel grafo un nodo $M_\omega \geq_\omega M$.

S'indichi per ciascuna affermazione seguente se e' vera o falsa, con una breve motivazione.

- (A) e' condizione necessaria per (B)
Traccia di soluzione.
NO
- (A) e' condizione sufficiente per (B)
Traccia di soluzione.
SI
- (A) e' condizione necessaria e sufficiente per (B)
Traccia di soluzione.
NO

Conclusione: La marcatura M e' raggiungibile \Rightarrow esiste nel grafo un nodo $M_\omega \geq_\omega M$.

Leggendo da destra a sinistra la precedente implicazione, si puo' dire che e' necessario che esista nel grafo un nodo $M_\omega \geq_\omega M$ per poter affermare che la marcatura M e' raggiungibile, ma non e' sufficiente cioe' non e' vero che qualsiasi marcatura M ω -coperta da M_ω e' raggiungibile nella rete a partire dalla marcatura iniziale. E' quello che s'intende quando si dice che il grafo/albero di copertura solitamente definisce condizioni necessarie ma non sufficienti per dimostrare proprieta' di raggiungibilita'.

(b) Date le proposizioni

- (A) La marcatura M e' raggiungibile
- (B) $M \in \mathcal{N}^m$ e' un nodo del grafo.

S'indichi per ciascuna affermazione seguente se e' vera o falsa, con una breve motivazione.

- (A) e' condizione necessaria per (B)
Traccia di soluzione.
SI
- (A) e' condizione sufficiente per (B)
Traccia di soluzione.
NO
- (A) e' condizione necessaria e sufficiente per (B)
Traccia di soluzione.
NO

Conclusione: La marcatura M e' raggiungibile $\Leftrightarrow M \in \mathcal{N}^m$ e' un nodo del grafo.

Per confrontare i casi (a) e (b), si noti che in (b) si parla di M senza simboli ω e quindi diciamo che se c'e' un tale M nel grafo/albero di copertura allora la marcatura M e' raggiungibile, ma una marcatura M puo' essere raggiungibile anche senza che compaia esplicitamente nel grafo di copertura, purché sia ω -coperta da qualche nodo (marcatura) di tale grafo (ed (a) dice che non ogni marcatura ω -coperta e' veramente raggiungibile).

(c) Date le proposizioni

- (A) Sia data $\tilde{M} \in \mathcal{N}^n$. Esiste una marcatura raggiungibile $M \geq \tilde{M}$

- (B) esiste nel grafo un nodo $M_\omega \geq_\omega \tilde{M}$.

S'indichi per ciascuna affermazione seguente se e' vera o falsa, con una breve motivazione.

- (A) e' condizione necessaria per (B)
Traccia di soluzione.
SI
- (A) e' condizione sufficiente per (B)
Traccia di soluzione.
SI
- (A) e' condizione necessaria e sufficiente per (B)
Traccia di soluzione.
SI

Conclusione: Sia data $\tilde{M} \in \mathcal{N}^n$. Esiste una marcatura raggiungibile $M \geq \tilde{M} \Leftrightarrow$ esiste nel grafo un nodo $M_\omega \geq_\omega \tilde{M}$.

(d) Date le proposizioni

- (A) La marcatura M' e' raggiungibile da una marcatura $M \in R(N, M_0)$
- (B) esistono nel grafo due nodi $M_\omega \geq_\omega M$ e $M'_\omega \geq_\omega M'$, ed esiste un cammino orientato da M_ω a M'_ω .

S'indichi per ciascuna affermazione seguente se e' vera o falsa, con una breve motivazione.

- (A) e' condizione necessaria per (B)
Traccia di soluzione.
NO
- (A) e' condizione sufficiente per (B)
Traccia di soluzione.
SI
- (A) e' condizione necessaria e sufficiente per (B)
Traccia di soluzione.
NO

Conclusione: La marcatura M' e' raggiungibile da una marcatura $M \in R(N, M_0) \Rightarrow$ esistono nel grafo due nodi $M_\omega \geq_\omega M$ e $M'_\omega \geq_\omega M'$, ed esiste un cammino orientato da M_ω a M'_ω .

(e) Date le proposizioni

- (A) La marcatura M' e' raggiungibile da una marcatura $M \in R(N, M_0)$

- (B) esistono nel grafo due nodi $M, M' \in \mathcal{N}^m$, ed esiste un cammino orientato, non passante per alcun nodo contenente componenti ω , che va da M a M' .

S'indichi per ciascuna affermazione seguente se e' vera o falsa, con una breve motivazione.

- (A) e' condizione necessaria per (B)
Traccia di soluzione.
SI
- (A) e' condizione sufficiente per (B)
Traccia di soluzione.
NO
- (A) e' condizione necessaria e sufficiente per (B)
Traccia di soluzione.
NO

Conclusione: La marcatura M' e' raggiungibile da una marcatura $M \in R(N, M_0) \Leftarrow$ esistono nel grafo due nodi $M, M' \in \mathcal{N}^m$, ed esiste un cammino orientato, non passante per alcun nodo contenente componenti ω , che va da M a M' .

(f) Date le proposizioni

- (A) La transizione t e' abilitata da una marcatura $M \in R(N, M_0)$
- (B) esiste nel grafo un nodo $M_\omega \geq_\omega M$ da cui esce un arco t .

S'indichi per ciascuna affermazione seguente se e' vera o falsa, con una breve motivazione.

- (A) e' condizione necessaria per (B)
Traccia di soluzione.
NO
- (A) e' condizione sufficiente per (B)
Traccia di soluzione.
SI
- (A) e' condizione necessaria e sufficiente per (B)
Traccia di soluzione.
NO

Conclusione: La transizione t e' abilitata da una marcatura $M \in R(N, M_0) \Rightarrow$ esiste nel grafo un nodo $M_\omega \geq_\omega M$ da cui esce un arco t .

Si noti che non vale l'altro senso perché se esiste nel grafo un nodo M_ω da cui esce un arco t non necessariamente per ogni marcatura raggiungibile M ω -coperta da M_ω la transizione t è abilitata.

(g) Date le proposizioni

- (A) Esiste una marcatura raggiungibile che abilita una transizione t
- (B) esiste un arco t nel grafo.

S'indichi per ciascuna affermazione seguente se è vera o falsa, con una breve motivazione.

- (A) è condizione necessaria per (B)

Traccia di soluzione.

SI

- (A) è condizione sufficiente per (B)

Traccia di soluzione.

SI

- (A) è condizione necessaria e sufficiente per (B)

Traccia di soluzione.

SI

Conclusione: Esiste una marcatura raggiungibile che abilita una transizione $t \Leftrightarrow$ esiste un arco t nel grafo.