

# Sistemi - Modulo di Sistemi a Eventi Discreti

Laurea Magistrale in Ingegneria e Scienze Informatiche  
Tiziano Villa

26 Febbraio 2015

Nome e Cognome:

Matricola:

Posta elettronica:

problema	punti massimi	i tuoi punti
problema 1	15	
problema 2	15	
totale	30	

1. Si consideri un impianto  $G$  con  $\Sigma = \{a, b\}$ ,  $\Sigma_{uc} = \{b\}$ ,  $L(G) = \overline{a^*ba^*}$  (cioe' il linguaggio ottenuto dai prefissi delle stringhe dell'espressione regolare  $a^*ba^*$ ),  $L_m(G) = a^*ba^*$ .

(a) Si enunci formalmente la definizione di controllabilita' di un linguaggio e la si descriva intuitivamente a parole. Traccia di soluzione

**Definizione** Siano  $K$  e  $M = \overline{M}$  linguaggi sull'alfabeto di eventi  $E$ , con  $E_{uc} \subseteq E$ . Si dice che  $K$  e' controllabile rispetto a  $M$  e  $E_{uc}$ , se per tutte le stringhe  $s \in \overline{K}$  e per tutti gli eventi  $\sigma \in E_{uc}$  si ha

$$s\sigma \in M \Rightarrow s\sigma \in \overline{K}.$$

[equivalente a  $\overline{K}E_{uc} \cap M \subseteq \overline{K}$ ]

- (b) Si enunci formalmente la definizione di osservabilit  di un linguaggio e la si descriva intuitivamente a parole.

Traccia di soluzione.

**Definizione** Siano  $K$  e  $M = \overline{M}$  linguaggi sull'alfabeto di eventi  $E$ . Sia  $E_c \subseteq E$  l'insieme degli eventi controllabili. Sia  $E_o \subseteq E$  l'insieme degli eventi osservabili con  $P$  la proiezione da  $E^*$  a  $E_o^*$ .

Si dice che  $K$    osservabile rispetto a  $M, P, E_c$ , se per tutte le stringhe  $s \in \overline{K}$  e per tutti gli eventi  $\sigma \in E_c$ ,

$$s\sigma \notin \overline{K} \wedge s\sigma \in M \Rightarrow P^{-1}[P(s)]\{\sigma\} \cap \overline{K} = \emptyset.$$

Per tutti e tre i punti seguenti si supponga che gli eventi  $a$  e  $b$  siano indistinguibili, cioè esiste una proiezione  $P$  tale che  $P(a) = P(b) \neq \epsilon$  (vuol dire che si vede che l'impianto produce un evento, ma non si sa se produce  $a$  o  $b$ ).

(c) Si verifichi se la specifica  $K_1 = \{b\} \subseteq L(G)$  e' controllabile.

Si verifichi se la specifica  $K_1 = \{b\} \subseteq L(G)$  e' osservabile.

Si descriva una strategia di controllo, se esiste.

Traccia di soluzione.

$K_1$  e' controllabile.

$\overline{K_1} = \{\epsilon, b\}$ ,  $E_{uc} = \{b\}$ ; da cui  $\overline{K_1}E_{uc} \cap M = \{b, bb\} \cap M = \{b\} \subseteq \overline{K_1}$ .

$K_1$  e' osservabile.

I prefissi di  $K_1$  sono  $\epsilon, b$ ;  $E_c = \{a\}$ , perciò  $\sigma = a$ .

Per  $s = \epsilon$ , si ha  $s\sigma = a \notin \overline{K_1}$  e  $s\sigma = a \in M$ , ma  $P^{-1}[P(s)]\sigma \cap \overline{K_1} = \{\epsilon a\} \cap \overline{K_1} = \{a\} \cap \overline{K_1} = \emptyset$ , che rende vero l'antecedente e il conseguente e perciò rende vera l'implicazione.

Per  $s = b$ , si ha  $s\sigma = ba \notin \overline{K_1}$  e  $s\sigma = ba \in M$ , ma  $P^{-1}[P(s)]\sigma \cap \overline{K_1} = \{ba, aa\} \cap \overline{K_1} = \emptyset$ , che rende vero l'antecedente e il conseguente e perciò rende vera l'implicazione.

Esiste una strategia di controllo: si tiene  $a$  sempre disabilitato.

(d) Si verifichi se la specifica  $K_2 = \{aa\} \subseteq L(G)$  e' controllabile.

Si verifichi se la specifica  $K_2 = \{aa\} \subset L(G)$  e' osservabile.

Si descriva una strategia di controllo, se esiste.

Traccia di soluzione.

$\overline{K_2}E_{uc} \cap M = \{\epsilon, a, aa\}b \cap M = \{b, ab, aab\} \not\subseteq \overline{K_2}$ . Percio'  $K_2$  non e' controllabile,

Intuitivamente: non si puo' impedire all'impianto di produrre  $b$ .

$K_2$  e' osservabile.

I prefissi di  $K_2$  sono  $\epsilon, a, aa$ ;  $E_c = \{a\}$ , percio'  $\sigma = a$ .

Per  $s = \epsilon$ , si ha  $s\sigma = a \in \overline{K_2}$  e  $s\sigma = a \in M$ , che falsifica l'antecedente e rende vera l'implicazione.

Per  $s = a$ , si ha  $s\sigma = aa \in \overline{K_2}$  e  $s\sigma = aa \in M$ , che falsifica l'antecedente e rende vera l'implicazione.

Per  $s = aa$ , si ha  $s\sigma = aaa \notin \overline{K_2}$  e  $s\sigma = aaa \in M$ , ma  $P^{-1}[P(s)]\sigma \cap \overline{K_2} = \{aaa, aba, baa\} \cap \overline{K_2} = \emptyset$ , che rende vero l'antecedente e il conseguente e percio' rende vera l'implicazione.

Commento intuitivo. Il fatto che  $K_2$  e' osservabile significa che non e' l'osservabilita' limitata a rendere impossibile mantenere l'impianto entro la specifica. Infatti, non potendosi disabilitare  $b$ , non si possono impedire stringhe come  $b$  o  $ab$  o  $ba$  (o piu' lunghe come  $aab$ ); il fatto che non si riesca a distinguere  $b$  da  $a$  o  $aa$  da  $ab$  e  $ba$  non peggiora la situazione, gia' compromessa dall'incontrollabilita' di  $b$ .

Dato che  $K_2$  non e' controllabile, non esiste una strategia di controllo.

(e) Si verifichi se la specifica  $K_3 = \{b, aa\} \subset L(G)$  e' controllabile.

Si verifichi se la specifica  $K_3 = \{b, aa\} \subset L(G)$  e' osservabile.

Si descriva una strategia di controllo, se esiste.

Traccia di soluzione.

$\overline{K_3}E_{uc} \cap M = \{\epsilon, b, a, aa\}b \cap M = \{b, ab, aab\} \not\subseteq \overline{K_3}$ . Percio'  $K_3$  non e' controllabile,

Intuitivamente: non si puo' impedire all'impianto di produrre, ad esempio,  $ab$ .  $K_3$  non e' controllabile.

$K_3$  non e' osservabile, poiche'  $ba \notin \overline{K_3}$  e  $ba \in M$ , ma  $P^{-1}[P(s)]\sigma \cap \overline{K_3} = P^{-1}[P(b)]a \cap \overline{K_3} = \{aa, ba\} \cap \overline{K_3} \neq \emptyset$ .

Commento intuitivo. Il fatto che  $K_3$  non e' osservabile significa che se anche  $K_3$  fosse controllabile (e non lo e') l'osservabilita' limitata renderebbe impossibile mantenere l'impianto entro la specifica. Infatti, supponiamo che  $b$  fosse controllabile, se all'inizio l'impianto producesse  $a$  poi si dovrebbe disabilitare  $b$ , mentre se all'inizio l'impianto producesse  $b$  poi si dovrebbe disabilitare  $a$ . Ma se non si distinguono  $a$  e  $b$  non si sa se disabilitare  $a$  o  $b$ .

Dato che  $K_3$  non e' controllabile ne' osservabile, non esiste una strategia di controllo.

(f) L'osservabilit  e' preservata dall'unione ? Si motivi la risposta.

Traccia di soluzione.

No, poiche'  $K_1$  e  $K_2$  sono osservabili, ma  $K_3 = K_1 \cup K_2$  non e' osservabile.

(g) Si scriva la definizione di sottolinguaggio osservabile supremo.

Esiste sempre il sottolinguaggio osservabile supremo ? Si motivi la risposta.

Traccia di soluzione.

Il sottolinguaggio osservabile supremo dovrebbe essere l'unione (potenzialmente infinita) dei sottolinguaggi osservabili della specifica. Ma, dato che l'unione non preserva l'osservabilit , non   garantita l'esistenza del sottolinguaggio osservabile supremo.

Ad esempio, la specifica  $K_3$  non   osservabile. Qual   il suo sottolinguaggio osservabile supremo ? Non c' , perch   $K_3$  contiene  $K_1$  e  $K_2$ , due sottolinguaggi osservabili non confrontabili tra loro, e non contenuti in alcun sottolinguaggio osservabile che li contenga entrambi.

2. Una rete di Petri marcata e' specificata da una quintupla:  $\{P, T, A, w, x\}$ , dove  $P$  sono i posti,  $T$  le transizioni,  $A$  gli archi,  $w$  la funzione di peso sugli archi, e  $x$  il vettore di marcamento (numero di gettoni per posto).  $I(t_i)$  indica l'insieme dei posti in ingresso alla transizione  $t_i$ ,  $O(t_j)$  indica l'insieme dei posti in uscita dalla transizione  $t_j$ .

Si consideri la rete di Petri  $P_{hz812}$  definita da:

- $P = \{p_1, p_2, p_3, p_4, p_5\}$
- $T = \{t_1, t_2, t_3, t_4, t_5\}$
- $A = \{(p_1, t_1), (p_1, t_4), (p_2, t_3), (p_3, t_2), (p_3, t_4), (p_4, t_1), (p_5, t_2), (p_5, t_5), (t_1, p_2), (t_2, p_4), (t_3, p_1), (t_3, p_3), (t_4, p_5), (t_5, p_1), (t_5, p_3)\}$
- $\forall i, j \ w(p_i, t_j) = 1$
- $\forall i, j \ w(t_i, p_j) = 1$

Sia  $x_0 = [1, 0, 0, 1, 0]$  la marcatura iniziale.

- (a) Si disegni il grafo della rete di Petri  $P_{hz812}$ .

(b) Si disegni il grafo di raggiungibilit  della rete di Petri  $P_{hz812}$ .

Traccia di soluzione.

Il grafo di raggiungibilit  ha 4 nodi:  $[1, 0, 0, 1, 0]$ ,  $[0, 1, 0, 0, 0]$ ,  $[1, 0, 1, 0, 0]$ ,  $[0, 0, 0, 0, 1]$ , e i seguenti archi:

- i. da  $[1, 0, 0, 1, 0]$  a  $[0, 1, 0, 0, 0]$  sotto  $t_1$ ,
- ii. da  $[0, 1, 0, 0, 0]$  a  $[1, 0, 1, 0, 0]$  sotto  $t_3$ ,
- iii. da  $[1, 0, 1, 0, 0]$  a  $[0, 0, 0, 0, 1]$  sotto  $t_4$ ,
- iv. da  $[0, 0, 0, 0, 1]$  a  $[1, 0, 1, 0, 0]$  sotto  $t_5$ .

Traccia di soluzione.

(c) Data una rete di Petri e una marcatura iniziale, si definiscano per una transizione  $t$  le seguenti nozioni di vivezza:

- transizione  $L0 - viva$  (cioe' *morta*)

Traccia di soluzione.

A partire dalla marcatura iniziale, non c'e' nessuna successione di scatti che contiene  $t$ .

- transizione  $L1 - viva$

Traccia di soluzione.

A partire dalla marcatura iniziale, c'e' almeno una successione di scatti che contiene  $t$  almeno una volta.

- transizione  $L2 - viva$

Traccia di soluzione.

A partire dalla marcatura iniziale, per ogni  $k \geq 1$  c'e' almeno una successione di scatti che contiene  $t$  almeno  $k \geq 1$  volte.

- transizione  $L3 - viva$

Traccia di soluzione.

A partire dalla marcatura iniziale, c'e' almeno una successione di scatti che contiene  $t$  infinite volte.

- transizione  $L4 - viva$

Traccia di soluzione.

Per ogni marcatura raggiungibile a partire dalla marcatura iniziale, c'e' almeno una successione di scatti che contiene  $t$  almeno una volta.

Versione equivalente: Per ogni marcatura raggiungibile a partire dalla marcatura iniziale,  $t$  e'  $L1 - vivo$ .

Quali sono le implicazioni tra le precedenti definizioni di transizione  $Lk - viva$  ?

Traccia di soluzione.

$L4 - viva \Rightarrow L3 - viva \Rightarrow L2 - viva \Rightarrow L1 - viva$ .

(d) Si classifichino rispetto alla vivezza le transizioni  $t_1, t_2, t_3, t_4, t_5$  della rete di Petri  $P_{hz812}$ .

Traccia di soluzione:

In base al grafo di raggiungibilit  si deduce che:

- $t_1$ :  $L1 - viva$ ,
- $t_2$ :  $L0 - viva$ ,
- $t_3$ :  $L1 - viva$ ,
- $t_4$ :  $L4 - viva$ ,
- $t_5$ :  $L4 - viva$ .

Se tutte le transizioni sono  $Lk - vive$  anche la rete si dice  $Lk - viva$ , si classifichi in tal senso la rete  $P_{hz812}$ .

Traccia di soluzione.

La rete sarebbe  $L1 - viva$ , se non per  $t_2$  che    $L0 - viva$ . Perci  la rete non    $Lk - viva$  per  $k = 1, 2, 3, 4$ .