

# Sistemi - Modulo di Sistemi a Eventi Discreti

Laurea Magistrale in Ingegneria e Scienze Informatiche  
Tiziano Villa

15 Giugno 2015

Nome e Cognome:

Matricola:

Posta elettronica:

problema	punti massimi	i tuoi punti
problema 1	18	
problema 2	12	
totale	30	

1. (a) Si enunci il teorema sulla relazione tra raffinamento e simulazione di una macchina a stati finiti nondeterministica da parte di una macchina a stati finiti pseudo-nondeterministica.

Traccia di soluzione.

Se  $M_2$  e' pseudo-nondeterministica,  $M_1$  e' simulata da  $M_2$  se e solo se  $M_1$  raffina  $M_2$

- (b) Si enunci il teorema sulla relazione tra raffinamento e simulazione di una macchina a stati finiti nondeterministica da parte di una macchina a stati finiti nondeterministica.

Traccia di soluzione.

Se  $M_2$  e' nondeterministica,  $M_1$  e' simulata da  $M_2$  implica che  $M_1$  raffina  $M_2$ , ma  $M_1$  raffina  $M_2$  non implica che  $M_1$  e' simulata da  $M_2$ .

- (c) Si confrontino i due teoremi precedenti: le loro conclusioni sono le medesime ? Se non lo sono, se ne motivi la differenza.

Traccia di soluzione.

Nel primo caso, l'ipotesi più restrittiva che  $M_2$  sia pseudo-nondeterministica permette di stabilire che la simulazione è una condizione necessaria e sufficiente per il raffinamento, mentre nel secondo caso è solo una condizione sufficiente.

(d) Si considerino le due macchine a stati finiti seguenti:

Macchina  $M'$ :

- stati:  $s'_1, s'_2, s'_3$  con  $s'_1$  stato iniziale;
- transizione da  $s'_1$  a  $s'_3$ :  $\bullet/1$ ,  
transizione da  $s'_3$  a  $s'_3$ :  $\bullet/\perp, \bullet/0, \bullet/1$ ,  
transizione da  $s'_1$  a  $s'_1$ :  $\bullet/\perp$ ,  
transizione da  $s'_1$  a  $s'_2$ :  $\bullet/0$ ,  
transizione da  $s'_2$  a  $s'_2$ :  $\bullet/\perp, \bullet/0, \bullet/1$ .

Macchina  $M''$ :

- stati:  $s''_1, s''_2, s''_3$  con  $s''_1$  stato iniziale;
- transizione da  $s''_1$  a  $s''_3$ :  $\bullet/1$ ,  
transizione da  $s''_3$  a  $s''_3$ :  $\bullet/\perp, \bullet/0, \bullet/1$ ,  
transizione da  $s''_1$  a  $s''_1$ :  $\bullet/0, \bullet/\perp$ ,  
transizione da  $s''_1$  a  $s''_2$ :  $\bullet/0$ ,  
transizione da  $s''_2$  a  $s''_2$ :  $\bullet/\perp, \bullet/0, \bullet/1$ .

Si risponda in ordine alle seguenti domande (si indichi sempre il numerale romano in ogni risposta):

- i. Si disegnino i diagrammi di transizione delle due macchine.
- ii. Si classifichino le macchine rispetto al determinismo.

Traccia di soluzione.

$M'$  e' pseudo-nondeterministica.

$M''$  e' nondeterministica, ma non pseudo-nondeterministica.

- iii. Si definisca la relazione di simulazione tra due macchine a stati finiti. Si trovi una simulazione di  $M'$  da parte di  $M''$ , se esiste; e' la simulazione massima (cioe' l'unione tra tutte le simulazioni di  $M'$  da parte di  $M''$ ) ? Se no, si trovi la simulazione massima.

Traccia di soluzione.

$M''$  simula  $M'$  come mostrato dalla relazione:

$$R_{M'-M''} = \{(s'_1, s''_1), (s'_2, s''_2), (s'_3, s''_3)\}.$$

Un'altra relazione di simulazione per cui  $M''$  simula  $M'$  e' la seguente:

$$R_{M'-M''} = \{(s'_1, s''_1), (s'_2, s''_2), (s'_2, s''_1), (s'_3, s''_3), (s'_2, s''_3)\}.$$

La simulazione massima e'  $\mathcal{R}_{M'-M''} = \{(s'_1, s''_1), (s'_1, s''_2), (s'_1, s''_3), (s'_2, s''_1), (s'_2, s''_2), (s'_2, s''_3), (s'_3, s''_1), (s'_3, s''_2), (s'_3, s''_3)\}.$

- iv. Si trovi una simulazione di  $M''$  da parte di  $M'$ , se esiste; e' la simulazione massima (cioe' l'unione tra tutte le simulazioni di  $M''$  da parte di  $M'$ ) ? Se no, si trovi la simulazione massima.

Traccia di soluzione.

$M'$  simula  $M''$  come mostrato dalla relazione:

$$R_{M''-M'} = \{(s''_1, s'_1), (s''_1, s'_2), (s''_2, s'_2), (s''_3, s'_3), (s''_3, s'_2)\}.$$

La simulazione massima e'  $\mathcal{R}_{M''-M'} = \{(s''_1, s'_1), (s''_1, s'_2), (s''_1, s'_3), (s''_2, s'_1), (s''_2, s'_2), (s''_2, s'_3), (s''_3, s'_1), (s''_3, s'_2), (s''_3, s'_3)\}.$

- v. Si definisca la relazione di bisimulazione tra due macchine a stati finiti.

Si trovi una bisimulazione tra le due macchine, se esiste; e' la bisimulazione massima (cioe' l'unione tra tutte le bisimulazioni di  $M'$  e  $M''$ ) ? Se no, si trovi la bisimulazione massima.

Traccia di soluzione.

Scriviamo subito la bisimulazione massima

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_{M'-M''} &= \mathcal{R}_{M'-M''} \cup \mathcal{R}_{M''-M'} = \\ &= \{(s'_1, s''_1), (s'_1, s''_2), (s'_1, s''_3), (s'_2, s''_1), (s'_2, s''_2), (s'_2, s''_3), (s'_3, s''_1), (s'_3, s''_2), \\ & (s'_3, s''_3), (s''_1, s'_1), (s''_1, s'_2), (s''_1, s'_3), (s''_2, s'_1), (s''_2, s'_2), (s''_2, s'_3), (s''_3, s'_1), \\ & (s''_3, s'_2), (s''_3, s'_3)\}. \end{aligned}$$

- vi. Si descriva l'algoritmo di minimizzazione di una macchina a stati finiti.

Si minimizzi la macchina  $M'$  e si mostri il diagramma di transizione della macchina minimizzata cosi' trovata  $\min(M')$ .

Traccia di soluzione.

Si noti che gli stati della macchina minimizzata sono indicati tra  $\{\}$  poiche' sono insiemi di stati della macchina originale.

I tre stati  $s'_1, s'_2, s'_3$  sono tutti equivalenti.

Definiamo  $\hat{s}'_1$  come il rappresentante della classe di equivalenza di  $s'_1, s'_2, s'_3$ .

Macchina  $\min(M')$ :

- stati:  $\{\hat{s}'_1\}$  con  $\{\hat{s}'_1\}$  stato iniziale;
- transizione da  $\{\hat{s}'_1\}$  a  $\{\hat{s}'_1\}$ :  $\bullet/\perp, \bullet/0, \bullet/1$ .

- vii. Si descriva l'algoritmo di determinizzazione di una macchina a stati finiti.

Si determinizzi la macchina  $M''$  e si mostri il diagramma di tran-

sizione della macchina deterministica così trovata  $det(M'')$ .

Traccia di soluzione.

Macchina  $det(M'')$ :

- stati:  $\{s_1''\}, \{s_1'', s_2''\}, \{s_2'', s_3''\}, \{s_3''\}$  con  $\{s_1''\}$  stato iniziale;
- transizione da  $\{s_1''\}$  a  $\{s_1''\}$ :  $\bullet/\perp$ ,  
transizione da  $\{s_1''\}$  a  $\{s_1'', s_2''\}$ :  $\bullet/0$ ,  
transizione da  $\{s_1'', s_2''\}$  a  $\{s_1'', s_2''\}$ :  $\bullet/0, \bullet/\perp$ ,  
transizione da  $\{s_1''\}$  a  $\{s_3''\}$ :  $\bullet/1$ ,  
transizione da  $\{s_3''\}$  a  $\{s_3''\}$ :  $\bullet/\perp, \bullet/0, \bullet/1$ ,  
transizione da  $\{s_1'', s_2''\}$  a  $\{s_2'', s_3''\}$ :  $\bullet/1$ ,  
transizione da  $\{s_2'', s_3''\}$  a  $\{s_2'', s_3''\}$ :  $\bullet/\perp, \bullet/0, \bullet/1$ .

- viii. Si minimizzi la macchina  $det(M'')$  e si mostri il diagramma di transizione della macchina minimizzata così trovata  $min(det(M''))$ .

Traccia di soluzione.

I quattro stati  $\{s_1''\}, \{s_1'', s_2''\}, \{s_2'', s_3''\}, \{s_3''\}$  sono tutti equivalenti.

Definiamo  $\tilde{s}_1''$  come il rappresentante della classe di equivalenza di  $\{s_1''\}, \{s_1'', s_2''\}, \{s_2'', s_3''\}, \{s_3''\}$ .

Macchina  $min(det(M''))$ :

- stati:  $\{\tilde{s}_1''\}$  con  $\{\tilde{s}_1''\}$  stato iniziale;
- transizione da  $\{\tilde{s}_1''\}$  a  $\{\tilde{s}_1''\}$ :  $\bullet/\perp, \bullet/0, \bullet/1$ .

- ix. Si trovi una simulazione di  $min(M')$  da parte di  $min(det(M''))$ , se esiste; una simulazione di  $min(det(M''))$  da parte di  $min(M')$ , se esiste; una bisimulazione tra  $min(M')$  e  $min(det(M''))$ , se esiste.

Traccia di soluzione.

Le macchine  $min(M')$  e  $min(det(M''))$  hanno ciascuna un unico stato con le medesime transizioni, quindi sono isomorfe.

$$R_{min(M')-min(det(M''))} = \{(\hat{s}_1', \tilde{s}_1'')\},$$

$$R_{min(det(M''))-min(M')} = \{(\tilde{s}_1'', \hat{s}_1')\},$$

$$B_{min(M')-min(det(M''))} = \{(\hat{s}_1', \tilde{s}_1''), (\tilde{s}_1'', \hat{s}_1')\}.$$

- x. Si commentino i risultati precedenti.

Traccia di soluzione.

Le due macchine  $M'$  e  $M''$  sono equivalenti e bisimili. Determinizzando  $M''$  e minimizzando  $M'$  e  $det(M'')$  si ottengono due macchine  $min(M')$  e  $min(det(M''))$  con grafi delle transizioni isomorfi.

Tutto ciò è consistente con il fatto che le due macchine iniziali  $M'$

e  $M''$  generano il medesimo insieme che comprende tutte le possibili successioni sull'alfabeto  $\bullet/\perp, \bullet/0, \bullet/1$  e che tale linguaggio si può generare con un solo stato.

2. Si consideri il seguente grafo delle transizioni dei segnali (STG, Signal Transition Graph, nella letteratura in inglese):

- $V = \{v_1(a+), v_2(b-), v_3(a-), v_4(b+)\}$ ,  
insieme dei vertici, dove accanto a ogni vertice e' indicata tra parentesi la transizione di segnale corrispondente;
- $E = \{(v_1, v_2), (v_2, v_3), (v_3, v_4), (v_4, v_1)\}$ ,  
insieme degli archi;
- l'arco  $(v_4, v_1)$  ha un gettone.

(a) Si spieghi che cos'e' un grafo delle transizioni dei segnali e la sua interpretazione come rete di Petri.

Traccia di soluzione.

Un GTS - grafo di transizione dei segnali (STG - signal transition graph, in inglese) e' un modello formale per diagrammi temporali (che riportano le relazioni di causalita' tra i cambiamenti di livello di forme d'onda). Piu' formalmente, e' una rete di Petri interpretata dove le transizioni sono rappresentate direttamente dalle loro etichette (transizioni di segnali), e si omettono i posti (tutti i posti hanno una sola transizione in ingresso e una sola transizione in uscita - Grafo Marcato, MG - Marked Graph). I gettoni indicano lo stato iniziale del sistema.

(b) Si disegni il grafo delle transizioni dei segnali e la rete di Petri corrispondente.

Traccia di soluzione.

Si puo' rappresentare un grafo di transizione dei segnali (disegnando le transizioni come sbarrette e i posti come cerchietti), o nella sua forma semplificata (le transizioni sono rappresentate direttamente dalle etichette e si omettono i posti dato che hanno un'unica transizione in ingresso e in uscita). Qui si chiede di disegnare entrambe le rappresentazioni.

Vedi foglio allegato.

(c) Si disegni il grafo di raggiungibilit  di tale rete di Petri.

Traccia di soluzione.

Il grafo di raggiungibilit  GR (RG - reachability graph) di una rete di Petri   un sistema di transizione ST (TS - transition system) i cui stati sono gli stati raggiungibili della rete e gli eventi sono le transizioni della rete.

Vedi foglio allegato.

- (d) Codificando il grafo di raggiungibilit  si ottenga il grafo degli stati, e lo si disegni.

Traccia di soluzione.

Si puo' dire che il grafo degli stati GS (SG - state graph) e' l'interpretazione binaria del sistema di transizione che rappresenta il grafo di raggiungibilit . Ogni nodo e' etichettato con un vettore binario che riporta il valore binario di ogni segnale, e gli eventi rappresentano transizioni di segnali.

Vedi foglio allegato.

- (e) Si enuncino le proprieta' di codifica unica e di codifica completa. Si verifichi se il grafo ottenuto le soddisfa.

Traccia di soluzione.

*Codifica Consistente: per ogni transizione tra due stati del grafo degli stati, i due vettori binari degli stati differiscono solo per il cambio di valore del segnale che etichetta la transizione.*

*Codifica Unica: a ogni stato del grafo degli stati e' assegnato un codice binario unico.*

E' sufficiente per derivare senza ambiguit  le funzioni di stato futuro. Non e' una condizione necessaria perche' alcuni stati nel grafo degli stati possono essere equivalenti, oppure l'ambiguit  puo' riguardare i segnali d'ingresso (che non devono essere sintetizzati, ma e' compito dell'ambiente produrre correttamente).

*Codifica Completa: se due stati del grafo degli stati hanno lo stesso codice binario, essi hanno gli stessi segnali d'uscita abilitati.*

Intuitivamente, la codifica completa indica che il sistema ha abbastanza memoria per ricordarsi in che stato e' (e quindi che le funzioni di stato futuro sono deterministiche e percio' realizzabili). In particolare, se la codifica e' unica, essa e' completa.

Le proprieta' precedenti servono per garantire la realizzabilit  di un circuito (assumendo ovviamente anche la proprieta' della limitatezza).

*Limitatezza: il grafo degli stati ha un numero finito di stati, cioe' la rete di Petri originale ha un insieme di raggiungibilit  finito.*

Il grafo ottenuto soddisfa la proprieta' di Codifica Unica (e quindi di Codifica Completa).

- (f) Si sintetizzi il segnale di uscita  $b$  in funzione del segnale d'ingresso  $a$ , minimizzandone la funzione logica. Se ne mostri la realizzazione con porte logiche.

Si commenti il circuito ottenuto.

Traccia di soluzione.

In generale, le regioni di eccitazione  $ER(x+)$  e  $ER(x-)$  sono gl'insiemi di stati in cui sono abilitati rispettivamente  $x+$  e  $x-$ ; le regioni di quiescenza  $QR(x+)$  e  $QR(x-)$  sono gl'insiemi di stati in cui  $x$  ha il medesimo valore, 1 o 0, ed e' stabile:

$$\begin{aligned} ER(x+) &= \{s \in S \mid s \xrightarrow{x+}\}, \\ ER(x-) &= \{s \in S \mid s \xrightarrow{x-}\}, \\ QR(x+) &= \{s \in S \mid s(x) = 1 \wedge s \notin ER(x-)\}, \\ QR(x-) &= \{s \in S \mid s(x) = 0 \wedge s \notin ER(x+)\}. \end{aligned}$$

Calcolando le regioni di eccitazione  $ER(b+)$ ,  $ER(b-)$  ( $b$  cambia di livello) e di quiescenza  $QR(b+)$ ,  $QR(b-)$  ( $b$  non cambia di livello) del segnale  $b$ , si determina la funzione di stato futuro e la si minimizza (ad esempio con una mappa di Karnaugh).

$$ER(b+) = \{00\}, ER(b-) = \{11\}, QR(b+) = \{01\}, QR(b-) = \{10\}.$$

In questo caso si ottiene la realizzazione  $b = \bar{a}$ , cioe' il circuito negazione.

Vedi foglio allegato.

Nota finale.

Una realizzazione corretta delle uscite richiede che si abbiano transizioni sulle uscite se e solo se l'ambiente ne e' in attesa; transizioni non attese, o il non generare transizioni attese possono produrre malfunzionamenti.

Per garantire che il circuito sia indipendente dalla velocita' (speed independent), cioe' che la sua correttezza non dipenda dai ritardi effettivi delle componenti, s'impone la condizione di persistenza delle uscite: se c'e' una coppia di segnali di cui l'uno disabilita l'altro, entrambi devono essere segnali d'ingresso.

Vale il teorema: *Un grafo di transizione dei segnali (GTS, STG) e' realizzabile come un circuito indipendente dalle velocita' se e solo se il grafo degli stati (GS, SG) e' finito, consistente, persistente rispetto alle uscite e soddisfa la proprieta' di codifica completa.*

Inoltre per garantire che il circuito sintetizzato sia indipendente dalla velocità l'ipotesi di porte complesse atomiche richiede che tutti i ritardi interni ad ogni porta siano trascurabili e non producano alcun comportamento spurio osservabile esternamente. Le porte complesse sono astrazioni di realizzazioni fisiche e dipendono dalle tecnologie disponibili. A volte si allude a questo fatto disegnando le porte logiche come tutte "appiccicate" senza fili interni, per significare che si vorrebbe una realizzazione a porte complesse senza ritardi interni. Tale problematica esula dal nostro corso.