

Sistemi - Modulo di Sistemi a Eventi Discreti

Laurea Magistrale in Ingegneria e Scienze Informatiche
Tiziano Villa

5 Settembre 2011

Nome e Cognome:

Matricola:

Posta elettronica:

problema	punti massimi	i tuoi punti
problema 1	10	
problema 2	10	
problema 3	10	
totale	30	

1. Si considerino le seguenti macchine a stati finiti M_2 e M_1 .

M_2 :

- stati: s_1, s_2, s_3 con s_1 stato iniziale;
- due variabili d'ingresso $X = \{0, 1\}$ e $V = \{0, 1\}$, due variabili d'uscita $U = \{0, 1\}$ e $Z = \{0, 1\}$;
- transizione da s_1 a s_1 : $1 - /11$,
transizione da s_1 a s_2 : $00/10$,
transizione da s_1 a s_3 : $01/10$,
transizione da s_2 a s_1 : $-0/01$,
transizione da s_2 a s_3 : $-1/10$,
transizione da s_3 a s_1 : $-1/01$,
transizione da s_3 a s_2 : $-0/00$.

M_1 :

- stati: s_a, s_b, s_c, s_d con s_a stato iniziale;
- una variabile d'ingresso $U = \{0, 1\}$, una variabile d'uscita $V = \{0, 1\}$;
- transizione da s_a a s_a : $1/-$,
transizione da s_a a s_b : $1/0$,
transizione da s_a a s_c : $1/1$,
transizione da s_a a s_d : $0/-$,
transizione da s_b a s_a : $0/0$,
transizione da s_b a s_d : $0/1$,
transizione da s_b a s_d : $1/0$,
transizione da s_c a s_a : $0/1$,
transizione da s_c a s_d : $1/-$,
transizione da s_d a s_d : $-/-$.

(a) Si chiudano ad anello la macchina M_1 con la macchina M_2 , eliminando i segnali U e V per ottenere una macchina composta con ingresso X e uscita Z . Si costruisca la macchina composta.

La composizione di M_1 e M_2 è ben formata, cioè definisce per ogni stato e per ogni ingresso x una sola uscita z ?

Traccia di soluzione.

La composizione di M_1 e M_2 , denotata anche come $M_1 \bullet M_2$, genera una macchina non-deterministica con ingresso x e uscita z . Si accludono due

grafici che mostrano la composizione prima e dopo l'eliminazione delle variabili interne v, u (nei grafici non e' riportata la sbarretta che separa ingressi da uscite).

Si noti la corrispondenza tra stati delle macchine componenti e di quella composta: $s_0 = (s_1, s_a)$, $s_1 = (s_1, s_b)$, $s_2 = (s_1, s_c)$, $s_3 = (s_2, s_a)$, $s_4 = (s_2, s_b)$, $s_5 = (s_3, s_a)$, $s_6 = (s_3, s_c)$, $s_7 = (s_1, s_d)$, $s_8 = (s_2, s_d)$, $s_9 = (s_3, s_d)$.

Diciamo che la composizione non e' ben formata perche' negli stati s_1, s_2, s_8, s_9 per una data x si possono produrre z diverse. Si noti che negli altri stati, come ad esempio s_0 , anche quando ci sono piu' coppie v, u rispetto a cui M_1 e M_2 si possono sincronizzare, per un dato x si produce una sola uscita z , ad esempio in s_0 per $x = 1$ si hanno due coppie $v, u = 1, 1$ e $v, u = 0, 1$ per cui M_2 e M_1 si sincronizzano, ma in entrambi i casi l'uscita e' sempre $z = 1$, per cui in tali stati la composizione e' ben formata.

- (b) Si minimizzi il numero degli stati della macchina composta (indipendentemente dal fatto che sia ben formata oppure no), spiegando con chiarezza i passi del procedimento.

Traccia di soluzione.

Applicando il procedimento che ottiene la macchina con il minimo numero di stati bisimile alla composizione $M_1 \bullet M_2$ si ottiene una macchina con 5 stati, mostrata nel disegno accluso (si fondono gli stati s_3, s_5, s_7 , e gli stati s_2, s_8, s_9 , e gli stati s_4, s_6).

Tale macchina non e' necessariamente quella con il numero minimo di stati equivalente all'originale.

2. Una rete di Petri marcata e' specificata da una quintupla: $\{P, T, A, w, x\}$, dove P sono i posti, T le transizioni, A gli archi, w la funzione di peso sugli archi, e x il vettore di marcamento (numero di gettoni per posto). $I(t_i)$ indica l'insieme dei posti in ingresso alla transizione t_i , $O(t_j)$ indica l'insieme dei posti in uscita dalla transizione t_j .

Si consideri la rete di Petri P_{acicl} definita da:

- $P = \{p_1, p_2, p_3, p_4\}$
- $T = \{t_1, t_2\}$
- $A = \{(p_1, t_1), (p_2, t_2), (p_3, t_2), (t_1, p_2), (t_1, p_3), (t_2, p_4)\}$
- $\forall i, j \ w(p_i, t_j) = 1$, tranne che $w(p_2, t_2) = 2$
- $\forall i, j \ w(t_i, p_j) = 1$

Sia $x_0 = [3, 1, 0, 0]$ la marcatura iniziale.

- (a) Si disegni il grafo della rete di Petri P_{acicl} .

- (b) Una rete di Petri in cui non ci sono cicli chiusi (circuiti diretti) si dice aciclica. Per reti di Petri acicliche, affinché uno stato x sia raggiungibile da uno stato x_0 è necessario e sufficiente che esista una soluzione z per interi non-negativi dell'equazione $x = x_0 + zA$, dove A è la matrice d'incidenza.

Si usi tale risultato per dimostrare che il punto $x = [0, 0, 1, 2]$ è raggiungibile dal punto x_0 .

Traccia di soluzione.

Gli elementi della matrice A sono definiti come

$$a_{j,i} = w(t_j, p_i) - w(p_i, t_j)$$

da cui

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Il sistema si riduce a

$$\begin{aligned} 3 - z_1 &= 0 \\ 1 + z_1 - 2z_2 &= 0 \\ z_1 - z_2 &= 1 \\ z_2 &= 2 \end{aligned}$$

Esiste una soluzione per interi non-negativi $z = [3, 2]$.

- (c) Qual è l'interpretazione del vettore z ?

Traccia di soluzione.

La componente i -esima del vettore z denota il numero di volte che la transizione t_i deve scattare per passare dallo stato x_0 allo stato x .

Ad esempio, si può raggiungere x a partire da x_0 facendo scattare prima t_1 tre volte e poi t_2 due volte.

- (d) Si giustifichi in modo intuitivo la correttezza della condizione sufficiente (cioe' che l'esistenza di una soluzione z per interi non-negativi implica la raggiungibilita').

Traccia di soluzione.

Sia N_z la sottorete della rete di Petri aciclica costituita dalle transizioni t_i tali che $z_i > 0$ e dai loro posti d'ingresso e uscita insieme con i loro archi di connessione. Sia x_{0z} il sottovettore di x_0 ristretto ai posti in N_z . La sottorete (N_z, x_{0z}) e' aciclica. Si puo' dimostrare che in tale sottorete aciclica deve esserci almeno una transizione t_i che puo' scattare a partire da x_{0z} . Si faccia scattare t_i e si ottenga la marcatura risultante $x' = x_0 + uA$, $z' = z - u$, dove u ha tutte le componenti nulle tranne $u_i = 1$. Allora $x = x' + z'A$, $z' \geq 0$, e la sottorete $(N_{z'}, x'_{0z'})$ e' aciclica. Si ripeta il procedimento finche z' si riduce al vettore nullo.

3. Siano dati K e $M = \overline{M}$ linguaggi sull'alfabeto di eventi E , gli eventi controllabili $E_c \subseteq E$, gli eventi osservabili $E_o \subseteq E$, e sia P la proiezione da E^* a E_o^* .

- (a) Si presenti intuitivamente la nozione di K osservabile rispetto a M, E_o, E_c e poi la si scriva formalmente, commentando come la definizione matematica rispecchi puntualmente la nozione intuitiva.

Traccia di soluzione.

Si consultino le dispense per i dettagli.

Definizione intuitiva: se non si possono differenziare due stringhe in base alla loro osservazione, allora esse dovrebbero richiedere la medesima azione di controllo.

Si considerino i linguaggi K e $M = \overline{M}$ definiti sull'alfabeto di eventi E , con $E_c \subseteq E$, $E_o \subseteq E$ e P la proiezione naturale da E^* a E_o^* .

Si dice che K e' osservabile rispetto a M, E_o, E_c se per tutte le stringhe $s \in \overline{K}$ e per tutti gli eventi $\sigma \in E_c$

$$(s\sigma \notin \overline{K}) \wedge (s\sigma \in M) \Rightarrow P^{-1}[P(s)]\sigma \cap \overline{K} = \emptyset.$$

L'insieme di stringhe denotato dal termine $P^{-1}[P(s)]\sigma \cap \overline{K}$ contiene tutte le stringhe che hanno la medesima proiezione di s e possono essere prolungate in \overline{K} con il simbolo σ . Se tale insieme non e' vuoto, allora \overline{K} contiene due stringhe s e s' tali che $P(s) = P(s')$ per cui $s\sigma \notin \overline{K}$ e $s'\sigma \in \overline{K}$. Tali due stringhe richiederebbero un'azione di controllo diversa rispetto a σ (disabilitare σ nel caso di s , abilitare σ nel caso di s'), ma un supervisore non saprebbe distinguere tra s e s' per l'osservabilita' ristretta, e quindi non potrebbe esistere un supervisore che ottiene esattamente il linguaggio \overline{K} .

(b) Siano $E = \{u, b\}$ e $M = \overline{\{ub, bu\}}$, $E_o = \{b\}$, $E_c = \{b\}$.

Applicando la definizione, si verifichi se il linguaggio $K_2 = \{ub\}$ e' osservabile rispetto a M, E_o, E_c .

Traccia di soluzione.

Se si prende $s = \epsilon$ e $\sigma = b \in E_c$, si ha che $s\sigma = b \in M \setminus \overline{K_2}$.

Ma $s' = u \in P^{-1}[P(s)]$, poiche' $u \notin E_o$, e quindi $s'\sigma = ub \in P^{-1}[P(s)]\sigma$ e inoltre $s'\sigma = ub \in \overline{K_2}$, cioe' $s'\sigma = ub \in P^{-1}[P(s)]\sigma \cap \overline{K_2} \neq \emptyset$, percio' K_2 non e' osservabile.

(c) Si riporti la definizione di controllabilità'.

Si verifichi se il linguaggio $K_2 = \{ub\}$ e' controllabile rispetto a M, E_c suggerendo una strategia di controllo, se esiste.

Traccia di soluzione.

K_2 e' controllabile: prima si disabilita b , poi si riabilita.

K_2 e' un esempio di linguaggio controllabile e non osservabile rispetto a M, E_c e E_o dati.