

# Sistemi - Modulo di Sistemi a Eventi Discreti

Laurea Magistrale in Ingegneria e Scienze Informatiche  
Tiziano Villa

2 Luglio 2014

Nome e Cognome:

Matricola:

Posta elettronica:

problema	punti massimi	i tuoi punti
problema 1	18	
problema 2	12	
totale	30	

1. (a) Si consideri la seguente macchina a stati finiti:

Macchina  $M_1$ :

- Ingresso:  $U = \{0, 1\}$ ;
- Uscita:  $V = \{0, 1\}$ ;
- Stati:  $S = \{s_{1A}, s_{2B}, s_{3B}, s_d, s_K\}$  con  $s_{1A}$  stato iniziale e  $s_K$  stato non-accettante;
- Transizioni (etichetta  $U/V$ ):
  - transizione da  $s_{1A}$  a  $s_{1A}$ :  $1/-$ ,
  - transizione da  $s_{1A}$  a  $s_{2B}$ :  $1/0$ ,
  - transizione da  $s_{1A}$  a  $s_{3B}$ :  $1/1$ ,
  - transizione da  $s_{1A}$  a  $s_d$ :  $0/-$ ,
  - transizione da  $s_{2B}$  a  $s_{1A}$ :  $0/0$ ,
  - transizione da  $s_{2B}$  a  $s_d$ :  $0/1$ ,
  - transizione da  $s_{2B}$  a  $s_d$ :  $1/0$ ,
  - transizione da  $s_{3B}$  a  $s_{1A}$ :  $0/1$ ,
  - transizione da  $s_{3B}$  a  $s_d$ :  $1/-$ ,
  - transizione da  $s_d$  a  $s_d$ :  $-/-$ ,
  - transizione da  $s_{2B}$  a  $s_K$ :  $1/1$ ,
  - transizione da  $s_{3B}$  a  $s_K$ :  $0/0$ ,
  - transizione da  $s_K$  a  $s_K$ :  $-/-$ .

Si disegni il diagramma di transizione della macchina  $M_1$ . Si classifichi  $M_1$  rispetto al determinismo.

Traccia di soluzione.

$M_1$  e' nondeterministica, ma non pseudo-nondeterministica.

Si noti che una macchina e' nondeterministica se esiste almeno una sequenza d'ingresso cui risponde con almeno due sequenze d'uscita diverse.

- (b) Si descriva l'algoritmo per determinizzare una macchina a stati finiti non-deterministica.

*Si assuma la seguente semantica per gestire lo stato  $s_K$  non-accettante: sottoinsiemi di stati contenenti lo stato  $s_K$  non sono stati validi nella macchina determinizzata e perciò devono essere eliminati.*

Traccia di soluzione.

Si rimanda alle dispense sulle macchine a stati finiti (Lez. 16, TAH).

Si sottolinea un errore comune: nel costruire gli stati della macchina determinizzata, si devono considerare le coppie di ingressi/uscite  $(u, v) \in U \times V$  e non solo gl'ingressi  $u \in U$  (come si farebbe per determinizzare un automa che non e' deterministico).

- (c) Si determinizzi  $M_1$  ottenendo la macchina  $Det(M_1)$ . Si mostri il procedimento e la macchina risultante  $Det(M_1)$ . Si classifichi  $Det(M_1)$  rispetto al determinismo.

Traccia di soluzione.

Si mostra la tavola delle transizioni della macchina determinizzata  $Det(M_1)$ .

	<i>stati presenti</i>						
	$(s_{1A})$	$(s_d)$	$(s_{1A}, s_{2B})$	$(s_{1A}, s_{3B})$	$(s_{1A}, s_d)$	$(s_{1A}, s_{2B}, s_d)$	$(s_{1A}, s_{3B}, s_d)$
<i>U/V</i>	<i>stati futuri</i>						
0/0	$(s_d)$	$(s_d)$	$(s_{1A}, s_d)$		$(s_d)$	$(s_{1A}, s_d)$	
0/1	$(s_d)$	$(s_d)$	$(s_d)$	$(s_{1A}, s_d)$	$(s_d)$	$(s_d)$	$(s_{1A}, s_d)$
1/0	$(s_{1A}, s_{2B})$	$(s_d)$	$(s_{1A}, s_{2B}, s_d)$	$(s_{1A}, s_{2B}, s_d)$	$(s_{1A}, s_{2B}, s_d)$	$(s_{1A}, s_{2B}, s_d)$	$(s_{1A}, s_{2B}, s_d)$
1/1	$(s_{1A}, s_{3B})$	$(s_d)$		$(s_{1A}, s_{3B}, s_d)$	$(s_{1A}, s_{3B}, s_d)$		$(s_{1A}, s_{3B}, s_d)$

Si noti che  $Det(M_1)$  non e' una macchina deterministica. E come potrebbe essere altrimenti ? Se la macchina originale puo' produrre piu' sequenze di uscita diverse in risposta a una sequenza d'ingresso e la procedura di determinizzazione ne preserva il comportamento, anche  $Det(M_1)$  potra' produrre piu' sequenze di uscita diverse in risposta a una sequenza d'ingresso (che e' la definizione di macchina nondeterministica). Ma  $Det(M_1)$  e' una macchina pseudo-nondeterministica (aliter deterministica rispetto all'uscita), poiche' dato un ingresso, un'uscita e uno stato presente c'e' un unico stato futuro. In altre parole, l'automa sottostante (ottenuto fondendo le etichette d'ingresso e uscita in un'unica etichetta d'ingresso) e' deterministico.

- (d) Si descriva l'algoritmo per la minimizzazione degli stati di una macchina a stati finiti nondeterministica che produce una macchina equivalente con un numero minimo di stati tra quelle bisimili.

Traccia di soluzione.

Si rimanda alle dispense sulle macchine a stati finiti (Lez. 16, TAH).

Si sottolinea un errore comune: dato che  $Det(M_1)$  è una macchina pseudo-nondeterministica, cioè nondeterministica, si deve usare l'algoritmo per la minimizzazione di macchine nondeterministiche, non quello per la minimizzazione di macchine deterministiche. In particolare la versione per macchine nondeterministiche richiede di applicare ripetutamente un operatore di separazione che si riferisce alle coppie di ingressi/uscite  $(u, v) \in U \times V$  e non solo gl'ingressi  $u \in U$  (come si farebbe per minimizzare una macchina deterministica).

- (e) Si minimizzi il numero degli stati di  $Det(M_1)$  ottenendo la macchina  $Min(Det(M_1))$ .

Si mostri il procedimento e la macchina risultante  $Min(Det(M_1))$ . Si classifichi  $Min(Det(M_1))$  rispetto al determinismo.

Traccia della soluzione.

Per semplificare la derivazione, si e' applicato l'algoritmo tabulare alla tavola delle transizioni.

Si parte dalla tavola

	<i>stati presenti</i>						
	$(s_{1A})$	$(s_d)$	$(s_{1A}, s_{2B})$	$(s_{1A}, s_{3B})$	$(s_{1A}, s_d)$	$(s_{1A}, s_{2B}, s_d)$	$(s_{1A}, s_{3B}, s_d)$
<i>U/V</i>	<i>stati futuri</i>						
0/0	$(s_d)$	$(s_d)$	$(s_{1A}, s_d)$		$(s_d)$	$(s_{1A}, s_d)$	
0/1	$(s_d)$	$(s_d)$	$(s_d)$	$(s_{1A}, s_d)$	$(s_d)$	$(s_d)$	$(s_{1A}, s_d)$
1/0	$(s_{1A}, s_{2B})$	$(s_d)$	$(s_{1A}, s_{2B}, s_d)$	$(s_{1A}, s_{2B}, s_d)$	$(s_{1A}, s_{2B}, s_d)$	$(s_{1A}, s_{2B}, s_d)$	$(s_{1A}, s_{2B}, s_d)$
1/1	$(s_{1A}, s_{3B})$	$(s_d)$		$(s_{1A}, s_{3B}, s_d)$	$(s_{1A}, s_{3B}, s_d)$		$(s_{1A}, s_{3B}, s_d)$

Gli stati  $(s_{1A}, s_{3B})$  e  $(s_{1A}, s_{3B}, s_d)$  sono equivalenti (si noti che le loro colonne di stati futuri coincidono). Percio' ci riduciamo a una tavola con una colonna in meno dove lo stato  $(s_{1A}, s_{3B}, s_d)$  e' rimpiazzato dallo stato  $(s_{1A}, s_{3B})$ .

	<i>stati presenti</i>					
	$(s_{1A})$	$(s_d)$	$(s_{1A}, s_{2B})$	$(s_{1A}, s_{3B})$	$(s_{1A}, s_d)$	$(s_{1A}, s_{2B}, s_d)$
<i>U/V</i>	<i>stati futuri</i>					
0/0	$(s_d)$	$(s_d)$	$(s_{1A}, s_d)$		$(s_d)$	$(s_{1A}, s_d)$
0/1	$(s_d)$	$(s_d)$	$(s_d)$	$(s_{1A}, s_d)$	$(s_d)$	$(s_d)$
1/0	$(s_{1A}, s_{2B})$	$(s_d)$	$(s_{1A}, s_{2B}, s_d)$	$(s_{1A}, s_{2B}, s_d)$	$(s_{1A}, s_{2B}, s_d)$	$(s_{1A}, s_{2B}, s_d)$
1/1	$(s_{1A}, s_{3B})$	$(s_d)$		$(s_{1A}, s_{3B})$	$(s_{1A}, s_{3B})$	

Gli stati  $(s_{1A}, s_{2B})$  e  $(s_{1A}, s_{2B}, s_d)$  sono equivalenti (si noti che le loro colonne di stati futuri coincidono). Percio' ci riduciamo a una tavola con una colonna in meno dove lo stato  $(s_{1A}, s_{2B}, s_d)$  e' rimpiazzato dallo stato  $(s_{1A}, s_{2B})$ .

	<i>stati presenti</i>				
	$(s_{1A})$	$(s_d)$	$(s_{1A}, s_{2B})$	$(s_{1A}, s_{3B})$	$(s_{1A}, s_d)$
<i>U/V</i>	<i>stati futuri</i>				
0/0	$(s_d)$	$(s_d)$	$(s_{1A}, s_d)$		$(s_d)$
0/1	$(s_d)$	$(s_d)$	$(s_d)$	$(s_{1A}, s_d)$	$(s_d)$
1/0	$(s_{1A}, s_{2B})$	$(s_d)$	$(s_{1A}, s_{2B})$	$(s_{1A}, s_{2B})$	$(s_{1A}, s_{2B})$
1/1	$(s_{1A}, s_{3B})$	$(s_d)$		$(s_{1A}, s_{3B})$	$(s_{1A}, s_{3B})$

Gli stati  $(s_{1A}, s_d)$  e  $(s_{1A})$  sono equivalenti (si noti che le loro colonne di stati futuri coincidono). Percio' ci riduciamo a una tavola con una colonna in meno dove lo stato  $(s_{1A}, s_d)$  e' rimpiazzato dallo stato  $(s_{1A})$ .

	<i>stati presenti</i>			
	$(s_{1A})$	$(s_d)$	$(s_{1A}, s_{2B})$	$(s_{1A}, s_{3B})$
<i>U/V</i>	<i>stati futuri</i>			
0/0	$(s_d)$	$(s_d)$	$(s_{1A})$	
0/1	$(s_d)$	$(s_d)$	$(s_d)$	$(s_{1A})$
1/0	$(s_{1A}, s_{2B})$	$(s_d)$	$(s_{1A}, s_{2B})$	$(s_{1A}, s_{2B})$
1/1	$(s_{1A}, s_{3B})$	$(s_d)$		$(s_{1A}, s_{3B})$

Applicando l'algoritmo completo a questa macchina ridotta si ricava facilmente che tra i quattro rimasti non ci sono stati equivalenti, per cui abbiamo ottenuto la macchina  $Min(Det(M_1))$ .

$Min(Det(M_1))$  e' pseudo-nondeterministica.

2. Si consideri il seguente sistema composto da due cisterne contenenti acqua, indicizzate come cisterna n. 1 e cisterna n. 2. Entrambe le cisterne rilasciano in continuazione acqua, ciascuna con un flusso in uscita costante indicato rispettivamente da  $v_1 > 0$  per la prima, e da  $v_2 > 0$  per la seconda. Si aggiunge acqua al sistema tramite un tubo che garantisce un flusso costante in ingresso  $w$ , e che in qualsiasi istante di tempo sta riempiendo o l'una o l'altra cisterna. Si assume che lo spostamento del tubo da una cisterna all'altra avvenga istantaneamente. I volumi di acqua nelle due cisterne siano rispettivamente  $x_1(t)$  e  $x_2(t)$ . L'obiettivo e' di mantenere i volumi di acqua nelle due cisterne sopra i valori rispettivamente  $r_1$  e  $r_2$ , assumendo che inizialmente cio' sia vero. Questo obiettivo si ottiene mediante un controllore che sposta il tubo alla cisterna n. 1 quando  $x_1(t) \leq r_1$  o alla cisterna n. 2 quando  $x_2(t) \leq r_2$ .

Si rappresenti tale sistema con il seguente automa ibrido che ha due variabili di stato  $x_1(t)$  e  $x_2(t)$ , e l'uscita  $y(t) \equiv (x_1(t), x_2(t))$ , con  $r_1 = r_2 = 0$ ,  $v_1 = v_2 = 0,5$  e  $w = 0,75$ :

- locazioni:  $l_1, l_2$ ; iniziali, entrambe con condizione iniziale  $x_1(0) \geq r_1$  e  $x_2(0) \geq r_2$ ;
- condizioni iniziali: locazione =  $l_1$ ,  $x_1(0) = 0$ ,  $x_2(0) = 1$ ;
- dinamica della locazione  $l_1$ :  $\dot{x}_1(t) = w - v_1, \dot{x}_2(t) = -v_2, y(t) = (x_1(t), x_2(t))$ ,  
invariante della locazione  $l_1$ :  $x_2(t) \geq r_2$ ,  
dinamica della locazione  $l_2$ :  $\dot{x}_1(t) = -v_1, \dot{x}_2(t) = w - v_2, y(t) = (x_1(t), x_2(t))$ ,  
invariante della locazione  $l_2$ :  $x_1(t) \geq r_1$ ;
- transizione da  $l_1$  a  $l_2$ :  $A/y(t), x_1(t) := x_1(t), x_2(t) := x_2(t)$ ,  
transizione da  $l_2$  a  $l_1$ :  $B/y(t), x_1(t) := x_1(t), x_2(t) := x_2(t)$ ,  
dove  $A = \{(x_1(t), x_2(t)) \mid x_2(t) \leq r_2\}$ ,  
dove  $B = \{(x_1(t), x_2(t)) \mid x_1(t) \leq r_1\}$   
(la sintassi delle annotazioni di una transizione e' *guardia/uscita, azione*);
- ingresso assente perche' il sistema e' autonomo;
- uscita  $y(t) \in \text{Reali}$ .

- (a) Si disegni il diagramma di transizione degli stati dell'automa, annotando con precisione locazioni e transizioni.

- (b) Si studino e disegnino le traiettorie del sistema nel piano cartesiano fino al tempo  $t = 4$  (con il tempo in ascissa e le variabili di stato  $x_1(t)$  e  $x_2(t)$  in ordinata) a partire da  $l_1$  e  $x_1(0) = 0, x_2(0) = 1$ . Che cosa si può dire sull'insieme degli stati raggiungibili dell'automa ?

Traccia di soluzione.

Vedi grafico allegato.

Il sistema non progredisce oltre  $t = 4$ . perché è zenoniano (vedi punto successivo).

- (c) L'automa ibrido proposto presenta comportamenti zenoniani, cioe' tali che si abbia un numero infinito di transizioni discrete in un tempo finito ?

Traccia di soluzione.

Il sistema e' zenoniano poiche' il bilancio netto di uscita dell'acqua e'  $v_1 + v_2 - w = 0,5 + 0,5 - 0,75 = 0,25$ . Percio' quale che sia il modo in cui scambiamo il tubo tra le due cisterne, non possiamo evitare che entrambe le cisterne siano svuotate dopo il tempo  $t = 4$  (tale valore puo' essere ricavato in modo rigoroso, ottenendosi la formula  $t_0 + (x_1(t_0) + x_2(t_0) - r_1 - r_2)/(v_1 + v_2 - w)$ , che nel nostro caso vale 4). Siccome per specifica il tubo di erogazione e' sempre assegnato alla cisterna vuota, il tempo tra le operazioni di spostamento del tubo diventa sempre piu' piccolo, per cui si ha un numero infinito di transizioni in un tempo finito ( $t = 4$ ).