EX3 Calcolare la lunghezza di una curva γ con $\gamma \overset{=[\varphi]}{}$ rappresentata da
$$\varphi(t) = (\sin^3 t, \cos^3 t) \qquad t \in [0, \tfrac{\pi}{2}]$$
dopo aver verificato se φ sia una rappresentazione parametrica regolare di classe C^1

Ris

Def. $\varphi : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$, $\varphi \in C^1([a,b])$, $\|\varphi'(t)\| > 0 \ \forall t \in [a,b]$ si dice rappresentazione parametrica regolare di classe C^1 e si indica $\varphi \in Reg_1$.

$$\varphi(t) = (\underset{\varphi_1(t)}{\underset{\parallel}{\sin^3 t}}, \underset{\varphi_2(t)}{\underset{\parallel}{\cos^3 t}}) \quad t \in [0, \tfrac{\pi}{2}] \ ; \varphi \in C^1([0, \tfrac{\pi}{2}]) \text{ perchè } \varphi_1, \varphi_2 \in C^1([0, \tfrac{\pi}{2}])$$

$$\|\varphi'(t)\|^2 = \left(\frac{d\varphi_1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi_2}{dt}\right)^2 = (3\sin^2 t \cos t)^2 + (-3\cos^2 t \sin t)^2 =$$
$$= 9 \sin^4 t \cos^2 t + 9\cos^4 t \sin^2 t = 9 \sin^2 t \cos^2 t \ (\sin^2 t + \cos^2 t) = 9 \sin^2 t \cos^2 t.$$
$\|\varphi'(t)\| > 0 \quad \forall t \in (0, \frac{\pi}{2}) \qquad \varphi'(t) = 0$ in $t=0$, $t = \frac{\pi}{2}$ $\Rightarrow \varphi$ non è una rappresentazione parametrica regolare.

$$\ell(\gamma) = \int_a^b \|\varphi'(t)\| dt = \int_0^{\pi/2} \|\varphi'(t)\| dt = \int_0^{\pi/2} \sqrt{9 \sin^2 t \cos^2 t \ (\sin^2 t + \cos^2 t)} \ dt =$$
$$= 3 \int_0^{\pi/2} \sqrt{\frac{\sin^2(2t)}{4}} \ dt = \frac{3}{2} \int_0^{\pi/2} |\sin(2t)| \ dt \underset{\sin(2t) \geq 0 \text{ in } [0,\frac{\pi}{2}]}{\overset{\uparrow}{=}} \frac{3}{2} \int_0^{\pi/2} \sin(2t) \ dt = \frac{3}{4} \int_0^{\pi/2} 2\sin(2t) dt$$
$$= \frac{3}{4} (-\cos 2t) \Big|_0^{\pi/2} = \frac{3}{4} (\underbrace{-\cos\pi}_{1} + \underbrace{\cos 0}_{1}) = \frac{3}{2}$$

Osservazione EXTRA esame

Si osservi che la rappresentazione della curva non è regolare, ma la traccia della curva, se "disegnata", ha lunghezza finita.
Infatti si può dimostrare che se $\varphi : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $\varphi \in C^1([a,b])$ (la derivata negli estremi è da intendersi derivata dx/sx), $\varphi'(t) \neq 0 \ \forall t \in (a,b) \Rightarrow \varphi$ è rettificabile (cioè $\ell(\gamma) < +\infty$) e vale $\ell(\gamma) = \int_a^b \|\varphi'(t)\| dt$.

EX 3 file B G4