

Correzione del compitino del giorno 13 Dicembre 2012

DAVIDE BOSCAINI

Questa è una soluzione del compitino del giorno 8 febbraio 2011. Invito chi trovasse eventuali errori a segnalarli presso davide.boscaini@studenti.univr.it.

Esercizio 1 (6 punti). Studiare il dominio delle funzioni

a. $f(x) = \sqrt[6]{e^{2x} - 2e^x + 1},$

b. $f(x) = \frac{\log |x^4 - 1|}{1 - \cos(3x)}.$

Soluzione. Studiamo i due domini separatamente:

- a. Dal momento che la radice ha indice pari la condizione da imporre affinché la funzione sia ben definita è che il suo argomento sia non negativo. Dobbiamo chiedere cioè che

$$e^{2x} - 2e^x + 1 \geq 0.$$

Per far questo poniamo $t = e^x$, e scriviamo la disequazione risultante

$$t^2 - 2t + 1 \geq 0.$$

È immediato verificare che l'equazione $y = t^2 - 2t + 1$ definisce una parabola nell'incognita t rivolta verso l'alto e con vertice nel punto $(2, 0)$. Per ogni $t \in \mathbb{R}$ essa quindi non è mai negativa, pertanto il dominio di $f(x)$ risulta essere l'intero asse reale: $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$.

- b. In questo caso dobbiamo preoccuparci sia del logaritmo che del fatto che la funzione assegnata è fratta. Per quanto riguarda il logaritmo, esso è ben definito per valori dell'argomento strettamente positivi, dovremmo pertanto imporre che

$$|x^4 - 1| > 0.$$

Tuttavia, per definizione di valore assoluto, l'espressione precedente è sempre non negativa, possiamo quindi limitarci a chiedere che sia diverso da zero, cioè

$$x^4 - 1 \neq 0.$$

Quindi il logaritmo è ben definito per $x \neq \pm 1$.

Dal momento che quella assegnata è una funzione fratta, affinché sia ben definita dovremmo richiedere che il denominatore sia diverso da zero, e cioè

$$1 - \cos(3x) \neq 0.$$

In questo caso abbiamo $\cos(3x) \neq 1$, cioè $3x \neq 2k\pi$, per $k \in \mathbb{Z}$, da cui ricaviamo $x \neq 2k\pi/3$. Riassumendo il dominio è $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{\pm 1, 2k\pi/3 \text{ per } k \in \mathbb{Z}\}$.

Esercizio 2 (6 punti). Siano

$$f(x) = \sqrt{x+1}, \quad g(x) = \frac{1-x}{1+\cos x}.$$

Studiare l'insieme di definizione di $(g \circ f)(x)$ e di $f^{-1}(x)$.

Soluzione. Si ha

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \frac{1 - \sqrt{1+x}}{1 + \cos \sqrt{1+x}},$$

pertanto nello studio dell'insieme di definizione dobbiamo assicurarci che sia le radici quadrate che la frazione siano ben definite. Per quanto riguarda la radice quadrata basta imporre che

$$1+x \geq 0,$$

cioè che $x \geq -1$. Per quanto riguarda il denominatore dobbiamo chiedere che $1 + \cos \sqrt{1+x} \neq 0$, cioè che $\cos \sqrt{1+x} \neq -1$. Dobbiamo quindi escludere quei punti tali che

$$\sqrt{1+x} = \pi + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Questo succede per $x = (\pi + 2k\pi)^2 - 1$, $k \in \mathbb{Z}$. Riassumendo si ha $\text{Dom}(g \circ f) = [-1, +\infty) \setminus \{(\pi + 2k\pi)^2 - 1, k \in \mathbb{Z}\}$

Per quanto riguarda invece l'inversa della funzione f il procedimento da seguire è il seguente: partendo da $y = \sqrt{x+1}$ si deve esprimere x in funzione di y . Nel nostro caso questo lo si può fare elevando al quadrato ambo i membri dell'equazione precedente. Tuttavia per non alterarne il significato quest'operazione la si deve accompagnare dalle condizioni $y \geq 0$ e $x+1 \geq 0$. In questo modo si trova $y^2 = x+1$, cioè $x = y^2 - 1$. Dove l'ultima espressione vale per $y \geq 0$. Quindi $\text{Dom}(f^{-1}) = [0, +\infty)$.

In figura 1 si trovano i grafici di $f(x)$ e $f^{-1}(x)$.

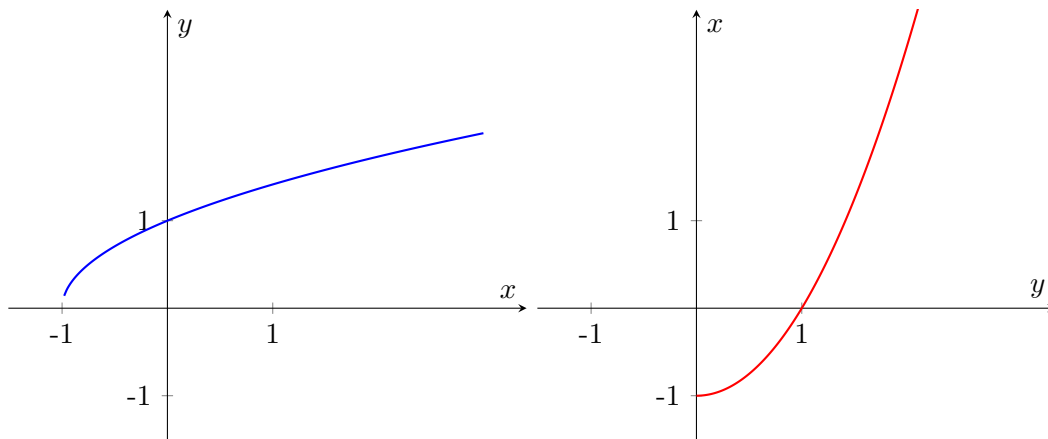


Figura 1: A sinistra: grafico della funzione $f(x)$. A destra: grafico della funzione $f^{-1}(x)$.

Esercizio 3 (6 punti). Disegnare il grafico della funzione

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{2}{\pi}x}, & \text{per } x < -\frac{\pi}{2}, \\ 2 \cos x, & \text{per } -\frac{\pi}{2} \leq x \leq 0, \\ \frac{1}{2}x^2 - 2x + 2, & \text{per } x > 0. \end{cases}$$

Determinare se la funzione $f(x)$ è continua e calcolare i punti di intersezione con l'asse delle ascisse.

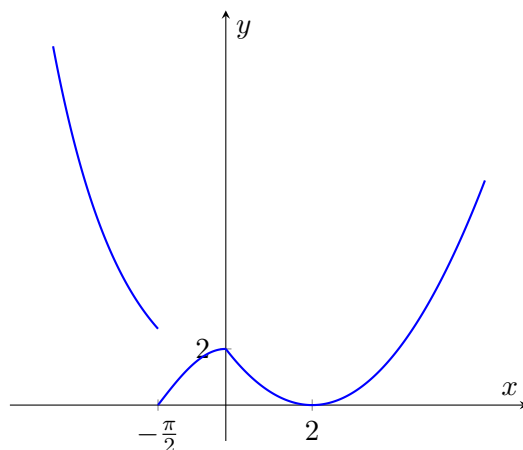


Figura 2: Grafico della funzione $f(x)$ definita a tratti.

Soluzione. Il grafico della funzione assegnata è riportato in figura 2.

Per prima cosa osserviamo che e^t , $\cos t$ e $at^2 + bt + c$ sono tutte funzioni continue in t . Osservato che i singoli tratti sono costituiti da funzioni continue, ci rimane da verificare la continuità della funzione composta solo nei punti di raccordo. In particolare quindi dobbiamo verificare se f è continua in $x = -\pi/2$ e in $x = 0$.

Si ha

$$\lim_{x \rightarrow -\pi/2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\pi/2^-} e^{-\frac{2}{\pi}x} = e^1 = e,$$

mentre

$$\lim_{x \rightarrow -\pi/2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\pi/2^+} 2 \cos x = 0,$$

pertanto

$$\lim_{x \rightarrow -\pi/2^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow -\pi/2^+} f(x) = f(-\pi/2),$$

quindi la funzione non è continua in $x = -\pi/2$.

Per $x = 0$ invece si ha

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} 2 \cos x = 2,$$

mentre

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{2}x^2 - 2x + 2 = 2,$$

pertanto

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0),$$

quindi la funzione è continua in $x = 0$.

Infine rimangono da discutere le intersezioni con l'asse delle ascisse. Per quanto riguarda la funzione esponenziale, $e^{-2x/\pi}$, per definizione è strettamente positiva su tutto l'asse reale, quindi, in particolare, anche per $x < -\pi/2$. Pertanto non presenterà punti di intersezione con l'asse delle ascisse. Per quanto riguarda le intersezioni della funzione cosinusoide, $2 \cos x$, con l'asse delle ascisse si deve porre

$$\begin{cases} y = 0, \\ y = 2 \cos x, \end{cases}$$

da cui si ricava $x = \pi/2 + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Quindi nell'intervallo $-\pi/2 \leq x \leq 0$ il coseno interseca l'asse delle ascisse solo nel punto $x = -\pi/2$. Per quanto riguarda la parabola $x^2/2 - 2x + 2$ si deve porre

$$\begin{cases} y = 0, \\ y = \frac{x^2}{2} - 2x + 2, \end{cases}$$

che ha soluzione $x = 2$. Dal momento che la soluzione trovata appartiene all'intervallo $x \geq 0$, la soluzione trovata è accettabile. Riassumendo la funzione $f(x)$ interseca l'asse delle ascisse in $x_1 = -\pi/2$ e $x_2 = 2$.

Esercizio 4 (6 punti). Disegnare il grafico delle funzioni

a. $f(x) = -\frac{3}{x^3} + 2$,

b. $f(x) = -|2 \ln |x| + e|$.

Soluzione. Studiamo il grafico delle due funzioni separatamente:

- a. DOMINIO: Per quanto riguarda il dominio della funzione $f(x)$ basta chiedere che il denominatore sia diverso da zero, cioè $x^3 \neq 0$, da cui segue $x \neq 0$.

INTERSEZIONE CON GLI ASSI CARTESIANI: L'intersezione con l'asse delle ascisse si trova imponendo

$$\begin{cases} y = 0, \\ y = -\frac{3}{x^3} + 2, \end{cases}$$

da cui si ricava $x = \sqrt[3]{3/2}$. Dallo studio del dominio è ovvio che la funzione non intersecherà l'asse delle ordinate.

SEGNO: Nello studio del segno ci si chiede quando $f(x) > 0$, in questo caso quindi ci chiediamo quando

$$-\frac{3}{x^3} + 2 > 0.$$

Se ci restringiamo al caso $x > 0$, si trova la soluzione $x > \sqrt[3]{3/2}$. Se invece poniamo $x < 0$, si verifica facilmente che ogni soluzione è valida: se si sommano quantità positive a 2, si ottengono sicuramente valori positivi. Riassumendo la funzione è positiva per $x < 0$ e $x > \sqrt[3]{3/2}$.

PARITÀ/DISPARITÀ: Una funzione si dice pari se $f(x) = f(-x)$. Nel nostro caso

$$f(-x) = \frac{3}{x^3} + 2 \neq f(x),$$

quindi non abbiamo simmetria rispetto all'asse delle ordinate. Una funzione si dice dispari se $f(-x) = -f(x)$. Nel nostro caso

$$-f(x) = \frac{3}{x^3} - 2 \neq f(-x),$$

quindi non abbiamo nemmeno simmetria rispetto l'origine.

LIMITI: Si ha

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \pm\infty} -\frac{3}{x^3} + 2 &= 2, \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} -\frac{3}{x^3} + 2 &= +\infty, \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} -\frac{3}{x^3} + 2 &= -\infty.\end{aligned}$$

Tenendo conto delle informazioni trovate si può tracciare il grafico della funzione, come fatto in figura 4.

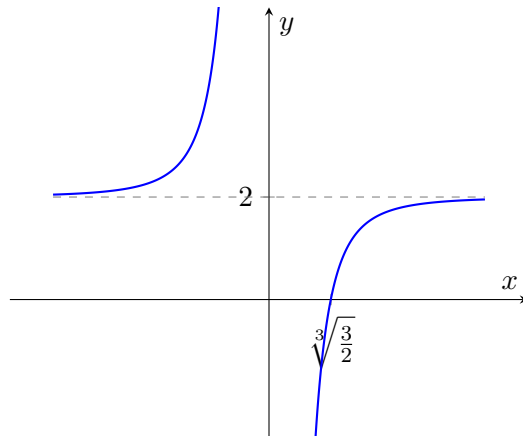


Figura 3: Grafico della funzione $f(x) = -\frac{3}{x^3} + 2$.

- b. DOMINIO: Per quanto riguarda il dominio della funzione $f(x)$ basta chiedere che l'argomento del logaritmo sia strettamente maggiore di zero, cioè $|x| > 0$, che equivale a chiedere $x \neq 0$.

INTERSEZIONE CON GLI ASSI CARTESIANI: L'intersezione con l'asse delle ascisse si trova imponendo

$$\begin{cases} y = 0, \\ y = -|2 \ln |x| + e|. \end{cases}$$

Un valore assoluto è nullo quando il suo argomento è nullo, e cioè per $2 \ln |x| + e = 0$, da cui si ricava $\ln |x| = -e/2$, ed applicando a funzione esponenziale ad ambo i membri dell'equazione troviamo le soluzioni $x = \pm e^{-e/2}$. Dallo studio del dominio è ovvio che la funzione non intersecherà l'asse delle ordinate.

SEGNO: Nello studio del segno ci si chiede quando $f(x) \geq 0$, in questo caso lo studio risulta particolarmente semplice: per definizione un valore assoluto è sempre non negativo. Applicando un segno negativo si ottiene una funzione non positiva.

PARITÀ/DISPARITÀ: Una funzione si dice pari se $f(x) = f(-x)$. Nel nostro caso

$$f(-x) = f(x),$$

per la presenza del valore assoluto, quindi abbiamo simmetria rispetto all'asse delle ordinate. Una funzione si dice dispari se $f(-x) = -f(x)$. Nel nostro caso

$$-f(x) = |2 \ln |x| + e| \neq f(-x),$$

quindi non abbiamo nemmeno simmetria rispetto l'origine.

LIMITI: Si ha

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} -|2 \ln |x| + e| = -\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^\pm} -|2 \ln |x| + e| = -\infty.$$

Tenendo conto delle informazioni trovate si può tracciare il grafico della funzione, come fatto in figura 4.

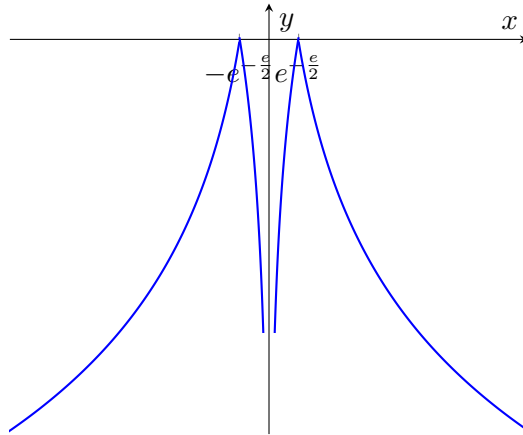


Figura 4: Grafico della funzione $f(x) = -\frac{3}{x^3} + 2$.

Esercizio 5 (6 punti). Calcolare i seguenti limiti

a.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3x}{x+5} + 2 \frac{x^2+1}{x^\pi} + \frac{e^{-x}}{\sqrt{e^{-x}+1}-1} \right),$$

b.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x - e^{2x}}{\sin 3x},$$

c.

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^3 - 3x + 1}{\sin x - \sin 2}.$$

Soluzione. Svolgiamo i vari limiti separatamente:

a. Per prima cosa osserviamo che possiamo riscrivere il limite assegnato come somma di limiti, cioè

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x}{x+5} + \lim_{x \rightarrow +\infty} 2 \frac{x^2+1}{x^\pi} + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{e^{-x}+1}-1}.$$

Il vantaggio è che, ora, possiamo studiare i vari addendi separatamente. Per quanto riguarda il primo addendo, raccogliendo sia dal numeratore che dal denominatore il termine di grado maggiore, si ha

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x}{x+5} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x}{x(1+5/x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{1+5/x} = 3.$$

Per il secondo membro, raccogliendo sia dal numeratore che dal denominatore il termine di grado maggiore, si ha

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 2 \frac{x^2+1}{x^\pi} = 2 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2(1+1/x^2)}{x^\pi} = 2 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1+1/x^2}{x^{\pi-2}} = 0,$$

infatti il denominatore tende a $+\infty$ ed il numeratore ad 1. Infine per il terzo membro, razionalizzando, si ha

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{e^{-x}+1}-1} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{e^{-x}+1}-1} \frac{\sqrt{e^{-x}+1}+1}{\sqrt{e^{-x}+1}+1} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{-x}(\sqrt{e^{-x}+1}+1)}{e^{-x}+1-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{-x}(\sqrt{e^{-x}+1}+1)}{e^{-x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{e^{-x}+1}+1 \\ &= 2.\end{aligned}$$

Riassumendo si ha

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x}{x+5} + \lim_{x \rightarrow +\infty} 2 \frac{x^2+1}{x^\pi} + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{e^{-x}+1}-1} = 3 + 0 + 2 = 5.$$

b. In questo caso si ha

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x - e^{2x}}{\sin 3x} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x(1 - e^x)}{\sin 3x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x(1 - e^x)}{\sin 3x} \frac{3x}{3x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x}{3} \frac{1 - e^x}{x} \frac{3x}{\sin 3x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} -\frac{e^x}{3} \frac{e^x - 1}{x} \frac{3x}{\sin 3x} \\ &= -\frac{1}{3},\end{aligned}$$

dove abbiamo sfruttato i limiti notevoli

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1, \quad \lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^t - 1}{t} = 1.$$

c. In questo caso l'unica difficoltà risiede nel capire se il valore della funzione sinusoidale in 2^+ è maggiore o minore rispetto al suo valore in 2. Per capir questo si possono seguire due strade

- $\pi \approx 3$, quindi $\pi/2 \approx 3/2$. Segue allora che $\pi/2 < 2 < \pi$. In questo intervallo, e cioè per $\pi/2 < x < \pi$, la funzione $\sin x$ è decrescente. Pertanto $\sin x_2 < \sin x_1$ per $x_2 > x_1$. Nel nostro caso abbiamo $x_1 = 2$ e $x_2 = 2^+$.
- grazie agli sviluppi di Taylor sappiamo che $\sin x = x - x^3/6 + o(x^5)$, pertanto $\sin 2 \approx 2 - 4/3 = 2/3$, mentre se consideriamo $2^+ \approx 2.1$ si ha $\sin 2.1 \approx 2.1 - (2.1)^3/6 \approx 2.1 - 1.5 = 0.6 < 0.\bar{6} = 2/3 = \sin 2$.

In entrambi i casi segue quindi che $\sin 2^+ < \sin 2$. Questo ci dice che, al tendere dell'incognita a 2^+ , il denominatore tende a 0^- , cioè

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \sin x - \sin 2 = 0^-.$$

Ma allora si ha

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^3 - 3x + 1}{\sin x - \sin 2} = \frac{3}{0^-} = -\infty.$$