Tutoraggio di Analisi II

dott.ssa Sconcella

Lezione del 14/12/2012

Esercizio

Calcolare massimi e minimi relativi delle seguenti funzioni

(1) $f(x,y) = 2x^3 + y^3 - 3x^2 - 3y$

(2) $f(x,y) = x^3 + y^3 - (1+x+y)^3$

(3) $f(x,y) = \cos(x) \cdot \sin(y)$

(4) $f(x,y) = x^4 + x^2 y + y^2 + 3$

5) $f(x,y) = x^4 + y^4 - 2(x^2 + y^4) + 4xy$

Svolgimento

(1) Per determinare i punti critici di f si calcola il gradiente di f, ovvero ∇f, e lo si pone uguale a zero.
Per determinare il gradiente di f si devono calcolare le derivate parziali prime di f. Si ha

$$\partial_x f = 6x^2 - 6x \qquad \qquad \Rightarrow \qquad \nabla f = \begin{bmatrix} 6x^2 - 6x \\ 3y^2 - 3 \end{bmatrix}$$
$$\partial_y f = 3y^2 - 3$$

Ponendo $\nabla f = \underline{0}$ si ricava il seguente sistema

$$\begin{cases} 6x^2 - 6x = 0 & \Rightarrow \quad x = 0 \text{ e } x = 1 \\ 3y^2 - 3 = 0 & \Rightarrow \quad y = -1 \text{ e } y = 1 \end{cases}$$

Pertanto abbiamo ricavato quattro punti critici, ovvero

$$A = (0,-1), \quad B(0,1), \quad C = (1,-1), \quad D = (1,1)$$

Per determinare la natura dei punti critici, dobbiamo calcolare la sua matrice hessiana di f, ovvero Hf.
Dobbiamo pertanto andare a calcolare le derivate parziali seconde di f. Quindi

$$\partial^2_{xx} f = 12x - 6$$

$$\partial^2_{yy} f = 6y \qquad \Rightarrow \qquad Hf(x,y) = \begin{pmatrix} 12x-6 & 0 \\ 0 & 6y \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{\partial^2_{xy} f = \partial^2_{xy} f}_{\text{per il teorema di Schwarz}} = 0$$

Andiamo a calcolare Hf nei quattro punti critici trovati.
Si ha

$$Hf(0,-1) = \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}$$

$\det(Hf(0,-1)) = + > 0$ e $\partial^2_{xx}(0,-1) < 0$
$\Rightarrow$ A è un punto di massimo relativo

$$Hf(0,1) = \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$$

$\det(Hf(0,1)) = - < 0$
$\Rightarrow$ B è un punto di sella

$$Hf(1,-1) = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}$$

$\det(Hf(1,-1)) = - < 0$
$\Rightarrow$ C è un punto di sella

$$Hf(1,1) = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$$

$\det(Hf(1,1)) = > 0$ e $\partial^2_{xx}(,1) > 0$
$\Rightarrow$ D è un punto di minimo relativo

2) Iniziamo osservando che la funzione è simmetrica, cioè $f(x,y) = f(y,x)$.
Procediamo con il calcolo dei punti critici di f.
Si calcola il gradiente di f e lo si pone uguale a zero.
Si ha che

$$\partial_x f = 3x^2 - 3(1+x+y)^2 = 0$$

$$\partial_y f = 3y^2 - 3(1+x+y)^2 = 0$$

Quindi

$$\nabla f = 0 \iff \begin{cases} 3x^2 - 3(1+x+y)^2 = 0 \\ 3y^2 - 3(1+x+y)^2 = 0 \end{cases}$$

dalla prima si ricava che $x = 1+x+y$ che sostituita nella seconda porta a $y^2 = x^2$, quindi si ricava che $x = \pm y$. Sostituiamo ora $x = y$ nella prima, da cui si ricava che $y^2 = (1+2y)^2$ quindi che $y = -1$ e $y = -\frac{1}{3}$. Sostituendo invece $x = -y$ nella prima si ricava che $y^2 = 1$, da cui $y = \pm 1$. Quindi i punti critici sono

$A = (-1, 1)$, $B = (1, -1)$, $C = (-1, -1)$, $D = (-1/3, -1/3)$.

Passiamo ora al calcolo delle derivate seconde. Si ha

$$\partial^2_{xx} f = 6x - 6(1+x+y)$$

$$\partial^2_{xx} f = 6y - 6(1+x+y)$$

$$\partial^2_{xy} f = \partial^2_{yx} f = -6(1+x+y)$$

Quindi la matrice hessiana nei punti critici diventa

$Hf(-1,1) = \begin{pmatrix} -12 & -6 \\ -6 & 0 \end{pmatrix}$ $\det(Hf(-1,1)) < 0 \Rightarrow A$ è un punto di sella

$Hf(1,-1) = \begin{pmatrix} 0 & -6 \\ -6 & -12 \end{pmatrix}$ $\det(Hf(1,-1)) < 0 \Rightarrow B$ è un punto di sella

$Hf(-1,-1) = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$ $\det(Hf(-1,-1)) < 0 \Rightarrow C$ è un punto di sella

$Hf(-1/3,-1/3) = \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$ $\det(Hf(-1/3,-1/3)) > 0$ e $\partial^2_{xx} < 0$ $\Rightarrow D$ è un punto di massimo relativo

(3) La funzione è 2π-periodica in ciascuna delle sue componenti. Studiamo pertanto il quadrato $[0, 2\pi[\times [0, 2\pi[$ e poi si estendono i risultati per periodicità.
Calcoliamo i punti critici di f. Si ha che

$$\nabla f = \begin{bmatrix} -\sin x \sin y \\ \cos x \cos y \end{bmatrix}$$

Ora $-\sin x \cdot \sin y = 0$ quando $x \in \{0, \pi\}$ oppure $y \in \{0, \pi\}$
mentre $\cos x \cos y = 0$ quando $x \in \{\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\}$ oppure $y \in \{\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\}$
I punti critici sono quindi
$(0, \frac{\pi}{2}), (0, \frac{3}{2}\pi), (\pi, \frac{\pi}{2}), (\pi, \frac{3}{2}\pi), (\frac{\pi}{2}, 0), (\frac{3}{2}\pi, 0), (\frac{\pi}{2}, \pi), (\frac{3}{2}\pi, \pi)$.
Le derivate seconde sono
$\partial^2_{xx} f = -\cos x \sin y$
$\partial^2_{yy} f = -\cos x \sin y$
$\partial^2_{xy} f = -\sin x \cos y$
Si ha quindi

$Hf(0, \frac{\pi}{2}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ $\det(Hf(0, \frac{\pi}{2})) > 0$, $\partial^2_{xx} < 0$ $\Rightarrow$ punto di massimo relativo

$Hf(0, \frac{3}{2}\pi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\det(Hf(-)) > 0$, $\partial^2_{xx} > 0$ $\Rightarrow$ punto di minimo relativo

$Hf(\pi, \frac{\pi}{2}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\det(Hf(-)) < 0$ $\Rightarrow$ punto di minimo relativo

$Hf(\pi, \frac{3}{2}\pi) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ $\det(Hf(-)) > 0$, $\partial^2_{xx} < 0$ $\Rightarrow$ punto di massimo relativo

$Hf(\frac{\pi}{2}, 0) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ $\det(Hf(-)) < 0$ $\Rightarrow$ punto di sella

$Hf(\frac{3}{2}\pi, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\det(Hf(-)) < 0$ $\Rightarrow$ punto di sella

$Hf(\frac{\pi}{2}, \pi) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\det(Hf(-)) < 0$ $\Rightarrow$ punto di sella

$Hf(\frac{3}{2}\pi, \pi) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ $\det(Hf(-)) < 0$ $\Rightarrow$ punto di sella

(4) Le derivate parziali sono

$$\partial_x f = 4x^3 + 2xy = x(4x^2 + y)$$

$$\partial_y f = x^2 + 2y$$

Si ha che $\nabla f = 0$ se e solo se $x=0$ e $y=0$. Quindi $(0,0)$ unico punto critico. Calcoliamo le derivate seconde

$$\partial^2_{xx} f = 12x^2 + 2y$$

$$\partial^2_{yy} f = 2$$

$$\partial^2_{xy} f = 2x$$

Quindi

$$Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad e \quad \det(Hf(0,0)) = 0$$

non possiamo usare il test dell'hessiana.

Osserviamo che $f(x,y) = g(x^2, y)$. Poniamo $v = x^2$ e $w = y$. Si ha che $g(v,w) = v^2 + vw + w^3 + 3$. Studiamo il segno dell'espressione $v^2 + vw + w^2$ per $v > 0$. Quindi andiamo a risolvere $v^2 + vw + w^2 = 0$ come equazione in w. Si ha che il discriminante $v^2 - 4v^2 < 0$, quindi l'equazione non ammette soluzioni quando $v > 0$. In particolare si ha che tale espressione è sempre positiva (strettamente).

Quindi $f(x,y) = g(x^2, y) > 3 = f(0,0)$ per ogni $x \neq 0$. Quindi $(0,0)$ è di minimo assoluto stretto.

5) Si trova che $(0,0)$ è un punto di sella. Infatti

$$\nabla f = \begin{bmatrix} 4x^3 - 4x + 4y \\ -4y^3 + 4x \end{bmatrix}$$

quindi imponendo $\nabla f = 0$, si trova il seguente sistema

$$\begin{cases} 4x^3 - 4x + 4y = 0 \\ -4y^3 + 4x = 0 \end{cases}$$

Dalla seconda ricaviamo $x = y^3$ che sostituito nella prima porta a
$4y^9 - 4y^3 + 4y = 0$ che riscriviamo come $y(y^8 - y^2 + 1) = 0$.
Da cui ricaviamo che $y = 0$ e quindi troviamo il punto $(0,0)$.
Mentre per quanto riguarda l'altro fattore, proviamo che $y^8 - y^2 + 1 \neq 0$ se $y \neq 0$.
Osserviamo che se $0 < |y| < 1$, allora $1 - y^2 \geq 0$, quindi $y^8 - y^2 + 1 \geq y^8 > 0$.
Invece se $|y| > 1$ si ha che $y^8 > y^2$ da cui $y^8 - y^2 + 1 > 1 > 0$.
Quindi il fattore $y^8 - y^2 + 1$ non è mai nullo.
Pertanto l'unico punto critico è $(0,0)$.
Calcoliamo le derivate seconde

$$\partial^2_{xx} f = 12x^2 - 4$$

$$\partial^2_{yy} f = -12y^2$$

$$\partial^2_{xy} f = 4$$

Quindi

$$Hf(0,0) = \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} \qquad \det(Hf(0,0)) = -16 < 0$$

quindi l'origine è un punto di sella.