TOPOLOGIA E GEOMETRIA DIFFERENZIALE Prof. M. Spera
a.a. 2009/10

Lezione XX

★ Teorema

Sia $X \in \mathfrak{g}$
$((L)_* X = X)$

Allora

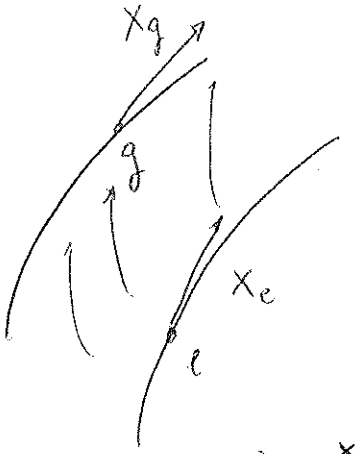
a) $\theta^X_t(g) = g\,\theta^X_t(e) \equiv L_g(\theta^X_t(e))$

b) X è completo, i.e. θ^X_t è def. $\forall t \in \mathbb{R}$

Dim a) considoriamo le curve ($t \in I$ opp.)

$t \longmapsto \theta^X_t(g)$

$t \longmapsto g \cdot \theta^X_t(e)$



$\theta^X_0(g) = g$

$g \cdot \theta^X_0(e) = g \cdot e = g$

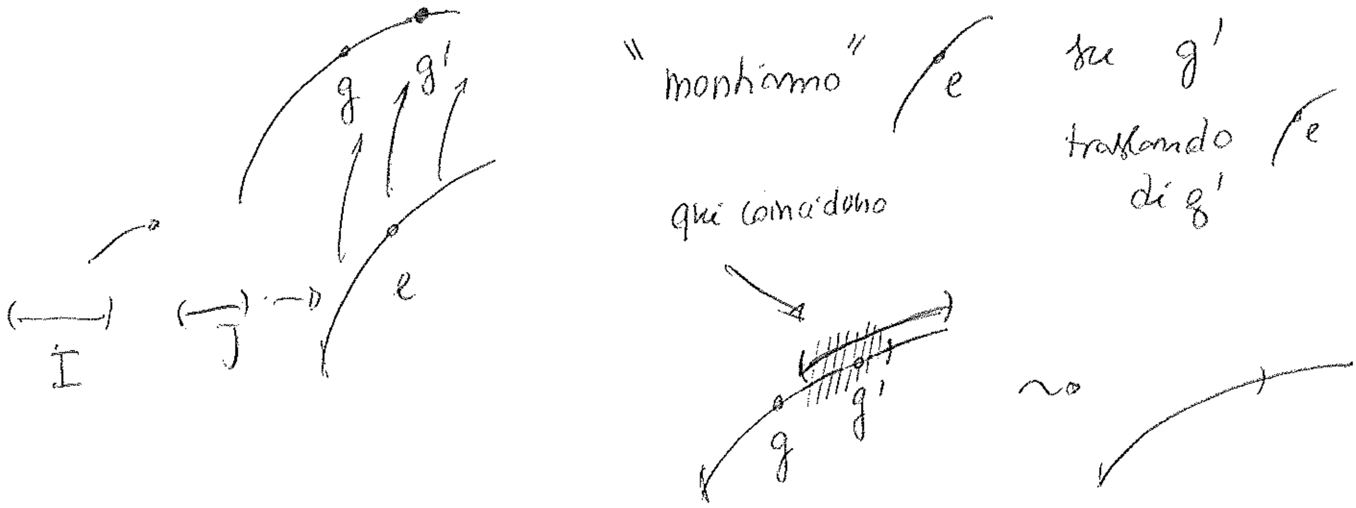
$$\left.\frac{d\ \theta^X_t(g)}{dt}\right|_{t=0} = X_g$$

$$\left.\frac{d\,(g\cdot\theta^X_t(e))}{dt}\right|_{t=0} = (L_g)_* X_e = X_g$$

$((L_g)_* X = X)$

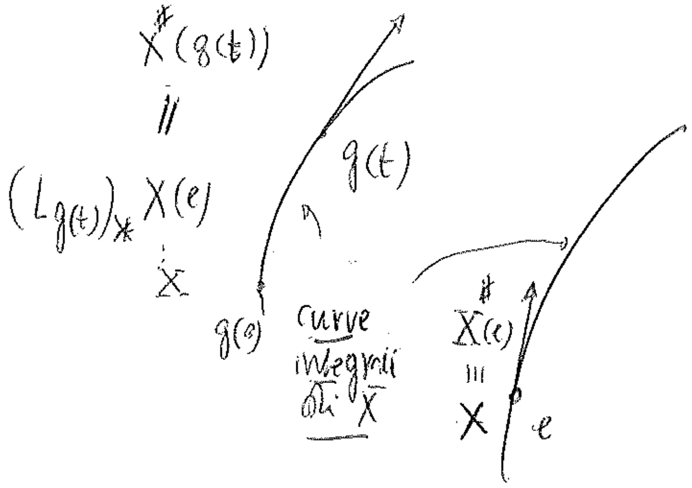
le due curve hanno lo stesso pto iniziale g e, ivi, la stessa velocità X_g coincidono in I

Per dimostrare b) osserviamo che



grazie all'invarianza a sinistra,
la nuova curva estende l'altra
quindi, se I è massimale, deve coincidere con $\mathbb{R}$.

Riscriviamo a) in altro modo



$$X = X^\#(e)$$

$X^\#$: campo vettoriale invariante a sinistra individuato da X

$$X^\#(g) = (L_g)_* X(e)$$

$$\boxed{\dot g(t) = (L_{g(t)})_* X} \qquad (\diamond)$$

Se G è un gruppo di matrici, $(\diamond)$ diventa

$$\boxed{\dot g = g X}$$

$$\Rightarrow \quad g(t) = g(0)\, e^{tX}$$

esponenziale matriciale

$$e^{tX} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} X^k$$

conv. $\forall\, t \in \mathbb{R}$

[Notare $\quad g^{-1}\dot g = X \qquad$ ($g^{-1}dg$: forma (a valori in $\mathfrak{g}$) di Maurer-Cartan)

$$(hg)^{-1} d(hg) \qquad (h \in G \text{ fissato})$$

$$= g^{-1} \cancel{h^{-1}} \cancel{h}\, dg = g^{-1} dg$$

(invarianza a sinistra)]

Si pone allora per $t \in \mathbb{R}$

$$t \longmapsto \Theta_t^X(e) \equiv \exp(tX)$$

e si parla di

sottogruppo ad un parametro generato da X

$$\exp_X \quad \mathbb{R} \longrightarrow G$$
$$t \longmapsto \Theta_t^X(e) \equiv \exp(tX)$$

è in effetti un omomorfismo di gruppi

$$\varphi(t+s) = \varphi(t)\cdot\varphi(s) = \varphi(s)\cdot\varphi(t)$$

$\{\Theta_t^X(e)\}_{t\in\mathbb{R}}$ diviene un sottogruppo abeliano di G

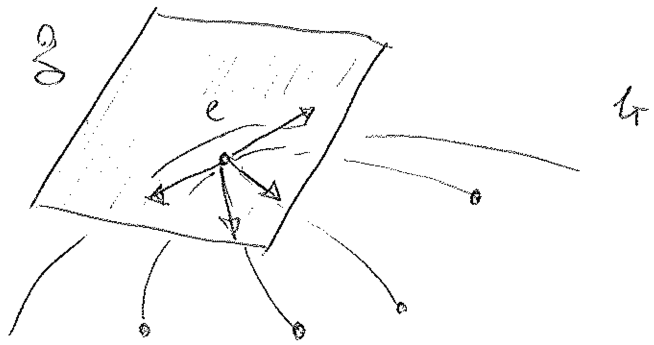
L'applicazione

$$\exp : \mathfrak{g} \longrightarrow G$$
$$X \longrightarrow \exp(X) = \Theta_1^X(e)$$

è detta applicazione esponenziale

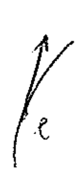
localmente è un diffeomorfismo perché

$$T_eG \cong \mathfrak{g}$$



$$\exp_*\big|_0 = I_n \quad (*)$$

$$\left.\frac{d(\exp tX)}{dt}\right|_{t=0} = X \quad (*)$$



[per il teorema della funzione inversa, che vale anche sulle varietà]

Definiremo anche un'applicazione exp in ambito Riemanniano

4 Esempi vari

1. $\mathbb{R}^n$ $\qquad (x,y) \longmapsto x+y$ $\qquad$ gruppo abeliano

$$L_x y = x+y = R_x y$$

$$(L_a)_* \frac{\partial}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}$$

infatti $x' = a + x$

$dx' = dx$

$(L_a)_* = I$

$$(L_a)_* \Big[\underbrace{\sum a_i(x) \frac{\partial}{\partial x^i}}_{X} \Big]$$

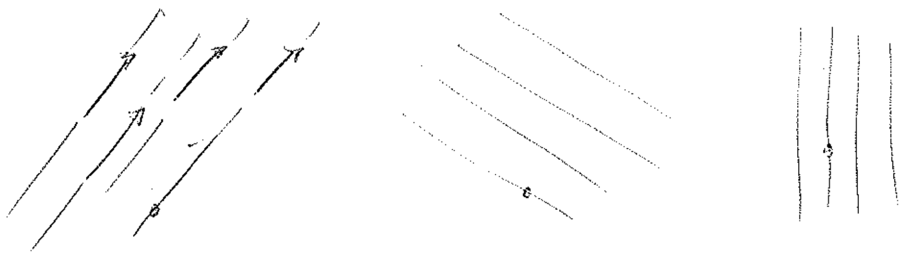
$$= \sum a_i(x+a) \frac{\partial}{\partial x^i} = \sum a_i \frac{\partial}{\partial x^i}$$

$$\Longleftrightarrow \qquad a_i(x+a) = a_i(x) \qquad \forall x$$

i.e. $\quad a_i(x) \equiv a_i$ costanti.

|| ovvero, l'algebra di Lie di $\mathbb{R}^n$
|| è data dai campi vettoriali (a coefficienti) costanti

|| curve integrali: rette (traslate delle rette per
|| l'origine



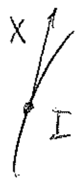
2. $G = GL_n(\mathbb{R})$ $\qquad \mathfrak{g} = M_n(\mathbb{R})$

$[\ ,\ ]$ = commutatore

sottogruppo ad un parametro generato da $X \in \mathfrak{g}$

$$\underset{G}{\overset{\cap}{A(t)}} = e^{tX} \equiv \exp(tX)$$

$\left[\begin{matrix}\text{esponenziale} \\ \text{matriciale}\end{matrix} = \begin{matrix}\text{esponenziale} \\ \text{gruppale}\end{matrix}\right]$



Si osservi che, per $A \in G$ sufficientemente vicino a I (si usi una qualsiasi norma sullo spazio delle matrici, esse danno luogo alla stessa topologia)

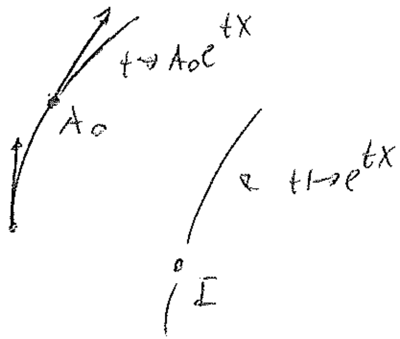
$$A = e^X \quad \text{per un unico } X \in \mathfrak{g}$$

posto $A = I + K$, $\quad X = \log(1+K) := K - \frac{K^2}{2} + \frac{K^3}{3} - \dots$

(convergente per $\|K\| < 1$)

In generale, la curva integrale di X, letto come campo vettoriale invariante a sinistra, passante per $A_0 \in G$, è

$$A(t) = A_0 e^{tX}$$

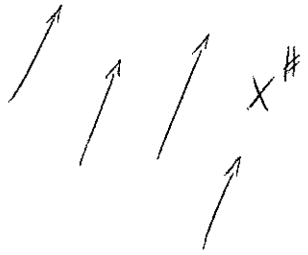


(che, come è giusto che sia, è la traslata <u>a sinistra</u>, tramite A_0, di $t \mapsto e^{tX}$

⚠ Andrebbe verificato che $\underbrace{[X^\#, Y^\#]}_{\text{parentesi di Lie}} = \underbrace{[X, Y]}_{\text{commutatore matriciale}}{}^\#$

Ciò si può vedere così:

$$X^\#\big|_A = A X = A X^\#\big|_I$$



campo vett. invariante a sinistra corrispondente a $X \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$

$$X^\#\big|_A = \underbrace{A^i_j X^j_k}_{\xi^i_k} \frac{\partial}{\partial A^i_k}$$

$$Y^\#\big|_A = \underbrace{A^i_j Y^j_k}_{\eta^i_k} \frac{\partial}{\partial A^i_k}$$

$$\boxed{\frac{\partial A^i_r}{\partial A^j_l} = \delta^{ij}_{rl}}$$

calcolare

$$[X^\#, Y^\#]_{I_n} = \dots = \underbrace{(X^i_k Y^k_r - Y^i_k X^k_r)}_{= [X, Y]^i_r} \frac{\partial}{\partial A^i_r}\Big|_{I_n}$$

$$\Rightarrow \quad [X^\#, Y^\#] = [X, Y]^\#$$

3. $G = Gl_n(\mathbb{C})$ (visto come gruppo reale)

idem... $\mathfrak{g} = M_n(\mathbb{C})$

4. $U(n) = \{ U \in Gl_n(\mathbb{C}) \;/\; U^* U = U U^* = I_n \}$

gruppo unitario: $\qquad U^* = \bar{U}^T = \overline{U^T}$

trasformazioni lineari che lasciano invariato il prodotto scalare hermitiano standard: $\qquad \boxed{U^{-1} = U^*}$

di importanza fondamentale in meccanica quantistica

$$\langle z, w \rangle := \sum_{i=1}^{n} \bar{z}_i w_i = \bar{z}^T w \qquad \text{Infatti:}$$

$$z = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} \quad w = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}$$

$$\langle U z, U w \rangle = (\overline{Uz})^T U w$$

$$= \bar{z}^T \bar{U}^T U w \equiv \bar{z}^T U^* U w$$

$$= \bar{z}^T w \; (= \langle z, w \rangle) \iff U^* U = I$$

$$\mathfrak{u}(n) = \mathrm{Lie}(U(n))$$

$$= \{ X \in M_n(\mathbb{C}) \;/\; X^* + X = 0 \}$$

i.e. le matrici antihermitiane: $X^* = -X$

Procediamo, rapidamente, così:

Sia $U = U(t)$ una curva liscia uscente da I ($U(0) = I$, ad esempio $U(t) = e^{tX}$, $X \in M_n(\mathbb{C})$) a valori in $U(n)$, con velocità in I pari a X.

Da $U(t)^* U(t) = I \quad \forall\, t \in I$ segue, in particolare

$$\frac{d}{dt} (U^* U)\Big|_{t=0} = 0 \implies \underbrace{\dot{U}^*(0)}_{X^*} \underbrace{U(0)}_{I} + \underbrace{U^*(0)}_{I} \underbrace{\dot{U}(0)}_{X} = 0$$

$$\implies X^* + X = 0$$

leggera variante:

$$U = I + tX + o(t)$$
$$U^* = I + tX^* + o(t)$$

$$U^*U = I + t\underbrace{(X+X^*)}_{\overset{\|}{0}} + \dots \qquad X + X^* = 0$$

"impongo $U^*U = I$ al prim'ordine"

[è la versione infinitesimale di $UU^* = I$
non per nulla le algebre di Lie dei gruppi di Lie venivano chiamate inizialmente gruppi di Lie infinitesimali]

Si ricordi che per le matrici hermitiane, e più in astratto, per operatori hermitiani: $\langle Tv, w\rangle = \langle v, Tw\rangle$

$\langle\ ,\ \rangle$ prod. scalare hermitiano,

vale il teorema spettrale: un operatore hermitiano è unitariamente diagonalizzabile, ovvero $\exists$ base ortonormale di autovettori (e gli autovalori, come subito si vede, sono reali)

$$v \neq \underline{0}: \quad Tv = \lambda v \qquad \langle v, Tv\rangle = \langle v, \lambda v\rangle = \lambda \overset{\neq 0}{\langle v, v\rangle}$$
$$\qquad\qquad \overset{\|}{\langle Tv, v\rangle} = \langle \lambda v, v\rangle = \bar{\lambda}\langle v, v\rangle$$

sesquilinearità $\qquad \Rightarrow \bar{\lambda} = \lambda$

Il teorema vale anche per le matrici unitarie
(e più in generale per gli operatori unitari)

per una matrice unitaria $\quad \lambda_i = e^{i\varphi_i} \qquad \varphi_i \in \mathbb{R}$ individuato a meno di multipli interi di 2π

$\bar{U} = e^X$ $\quad$ X antihermitiana : infatti

$$\bar{U} = V \cdot D \cdot V^{-1} \qquad D = \begin{pmatrix} e^{i\varphi_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{i\varphi_n} \end{pmatrix} = e^Y \qquad Y = \begin{pmatrix} i\varphi_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & i\varphi_n \end{pmatrix}$$

$V \in U(n)$

$$= \bar{V} \cdot e^Y V^{-1}$$

$$= \bar{V} \left(\sum_k \frac{Y^k}{k!} \right) V^{-1} = \sum_k \frac{V Y^k V^{-1}}{k!}$$

$$= \sum_k \frac{V Y \overbrace{V^{-1} V}^{I} Y \overbrace{V^{-1} \ldots V}^{} Y V^{-1}}{k!}$$

$$= \sum_k \frac{X^k}{k!} \qquad \square$$

Y non univocamente determinati

$Y = \log D$

nel senso complesso!

◊◊◊

Per le matrici a valori complessi, il polinomio caratteristico è completamente fattorizzabile (teor. f. dell'algebra), sicché ogni matrice siffatta è simile ad una matrice triangolare superiore. Da ciò segue subito che $\mathrm{tr}(A) = \sum a_{ii} = \sum \lambda_i$ e che $\det A = \prod \lambda_i$. Da questo è immediato p.ex. verificare che, se $\lambda_i > 0$

in gen. la def. è possibile ma delicata

$$\det A = \prod_i \lambda_i = \prod_i e^{\log \lambda_i} = e^{\sum \log \lambda_i} = e^{\mathrm{tr}(\log A)}$$

Sia ora $G = SU(n) : \{ U \in U(n) \,/\, \det U = +1 \}$ gruppo unitario speciale

Si ha:

$$1 = \det \bar{U} = \det(e^X) = \det e^Y = e^{\mathrm{tr}\, Y} = e^{\mathrm{tr}\, X}$$

$$\Rightarrow \mathrm{tr}\, X = 0$$

det e tr sono invarianti per similitudine e viceversa.

In altre parole:

4'. $G = SU(n)$, $\mathfrak{g} = \{X \in M_n(\mathbb{C}),\ X + X^* = 0,\ \operatorname{tr} X = 0\}$

matrici antihermitiane
a traccia nulla

5. $G = O(n)$ $\mathfrak{g} = \{X \in M_n(\mathbb{R}) \ /\ X^T + X = 0\}$

già visto, in ogni caso il ragionamento è analogo al precedente

5' $G = SO(n)$
$(\det = +1)$
$\mathfrak{g} = \{X \in M_n(\mathbb{R}) \ /\ X^T + X = 0,\ \operatorname{Tr} X = 0\}$

ragionamento analogo, purché
si legga $SO(n) \hookrightarrow SU(n)$, agente su $\mathbb{C}^n$.