

$$A \times B = \{ (a, b) \mid a \in A, b \in B \}$$

$$R \subseteq A \times B$$

$$\underbrace{(a, b) \in R} \begin{matrix} \nearrow \\ \searrow \end{matrix} \begin{matrix} \text{NOTAZ.} \\ a R b \\ R(a, b) \end{matrix}$$

1) FUNZIONI

2) ORDINAMENTI

3) EQUIVALENZE

$$R \subseteq A \times B$$

FUNZIONI

$$A, B \quad f: A \rightarrow B$$

$$1) \quad f \subseteq A \times B \quad \begin{array}{c} \downarrow \\ \text{dominio} \end{array} \quad \begin{array}{c} \curvearrowright \\ \text{codominio} \end{array}$$

$$2) \quad \forall a \in A \exists \text{ unico } b \in B \text{ t.c. } (a, b) \in f$$

NOTAZIONE

$$(a, b) \in f \Rightarrow f(a) = b$$

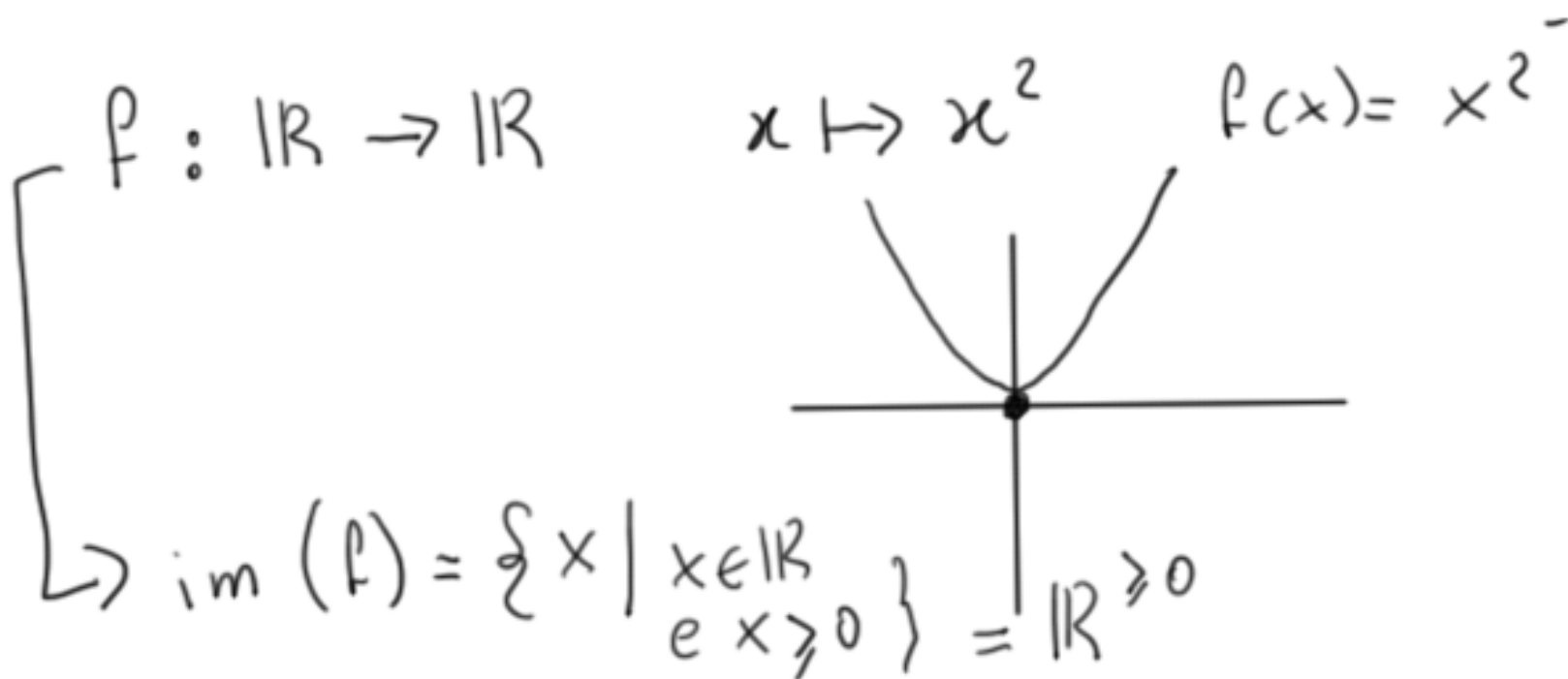
$$f: A \rightarrow B$$

$$A \xrightarrow{f} B$$

$$f(a) = b \quad a \xrightarrow{f} b$$

$$f: A \rightarrow B$$

$$\text{Im}(f) = \{ b \mid b \in B \text{ \& } \exists a \in A \ f(a) = b \}$$



→ $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ **NO** $f(x) = \ln(x)$ $x \mapsto \ln(x)$

$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ **NO** $x \mapsto \tan(x)$

$h: A \rightarrow B$ $\forall a \in A \exists! b \in B \quad h(a) = b$

→ $f: \mathbb{R}^{>0} \rightarrow \mathbb{R}$ $x \mapsto \ln(x)$



$g: \mathbb{R} - \{k\frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\} \rightarrow \mathbb{R}$

INIETTIVITA'

SURGETTIVITA'

f è detta SURGETTIVA

se $\text{im}(f) = B$

ovvero

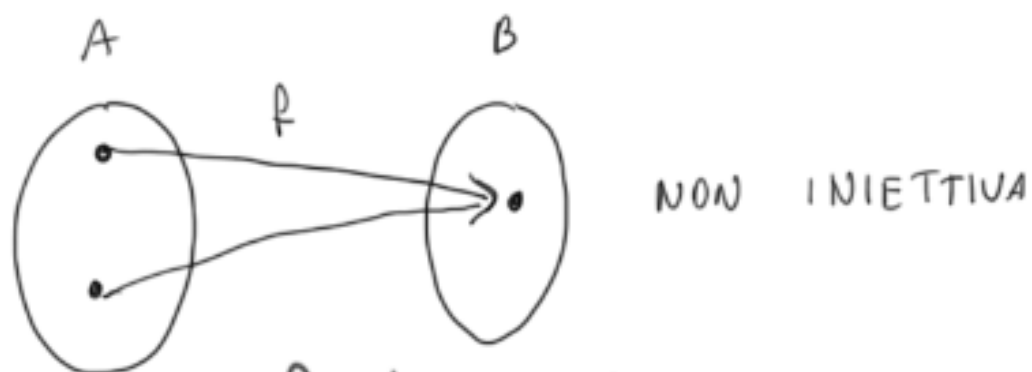
$\forall b \in B \exists a \in A \quad f(a) = b$

$f: A \rightarrow B$

f è detta INIETTIVA

se $\forall a_1, a_2 \in A$

se $f(a_1) = f(a_2) \Rightarrow a_1 = a_2$



$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad x \mapsto x^2$$

f è iniettiva? NO! $f(-2) = f(2) = 4$

f è surgettiva? NO! $-6 \notin \text{Im}(f)$

$$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \quad g(x) = x^2$$

g è iniettiva? NO $g(-2) = g(2) = 4$

g è suriettiva? SI $\text{Im}(g) = \mathbb{R}_{\geq 0}$

$$h: \mathbb{R}^{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}^{\geq 0} \quad x \mapsto x^2$$

h è INIETTIVA ? SI

h è SURIETTIVA ? SI

$$f : A \rightarrow B$$

È DETTA BIUNIVOCA / BIETTIVA

SE

f È INIETTIVA & SURGETTIVA

COMPOSIZIONE DI FUNZIONI

$$f : A \rightarrow B \quad g : B \rightarrow C$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

$$I_A : A \rightarrow A \quad x \mapsto x$$

I_A è chiamata

FUNZIONE IDENTITÀ

$$f : A \rightarrow B$$

$$f \circ I_A = f$$

$$I_B \circ f = f$$

$$(f \circ I_A)(x) = f(I_A(x)) = f(x)$$

$$(I_B \circ f)(x) = I_B(f(x)) = f(x)$$

TEOREMA

$$f: A \rightarrow B \quad \text{BIETTIVA}$$

$\Rightarrow$

$$\exists ! g \text{ t.c. } g: B \rightarrow A$$

$$f \circ g = I_B$$

$$f(g(x)) = x$$

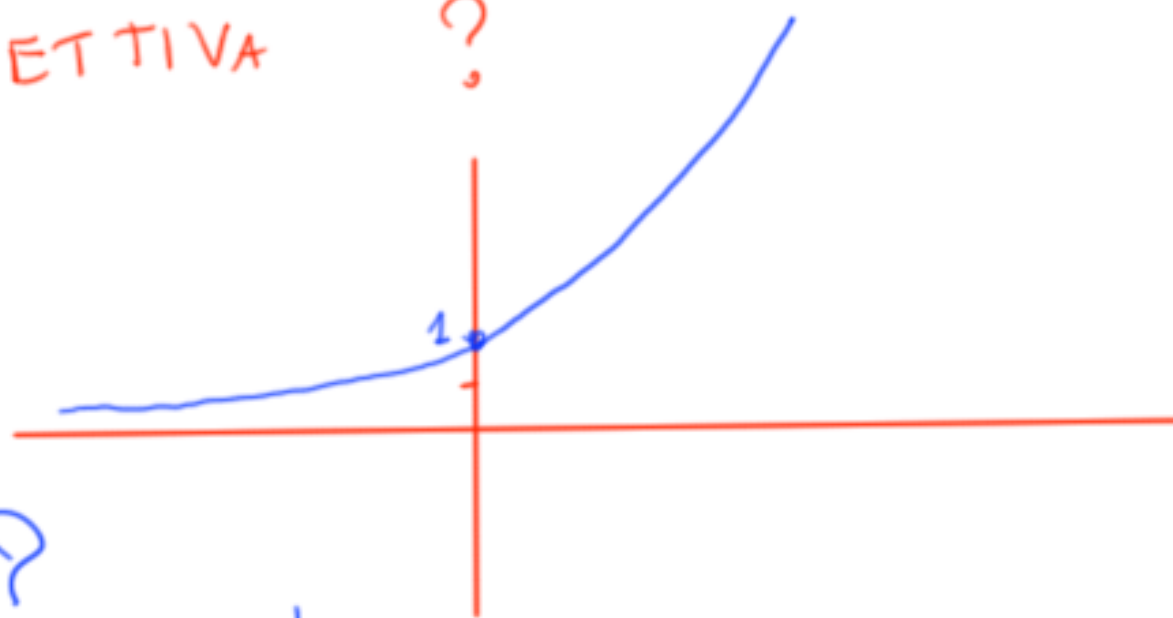
$$g \circ f = I_A$$

$$g(f(y)) = y$$

g è detta INVERSA di f ed è denotata f^{-1}

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{>0} \quad x \mapsto e^x$$

1) f è BIETTIVA ?



2) $f^{-1} = ?$

$$f^{-1} = \ln_e$$

$$f: A \rightarrow B$$

$$f^{-1}(Y) \quad Y \subseteq B$$

$$L = \{ a \mid a \in A \quad f(a) \in Y \}$$



IMMAGINE INVERSA DI Y

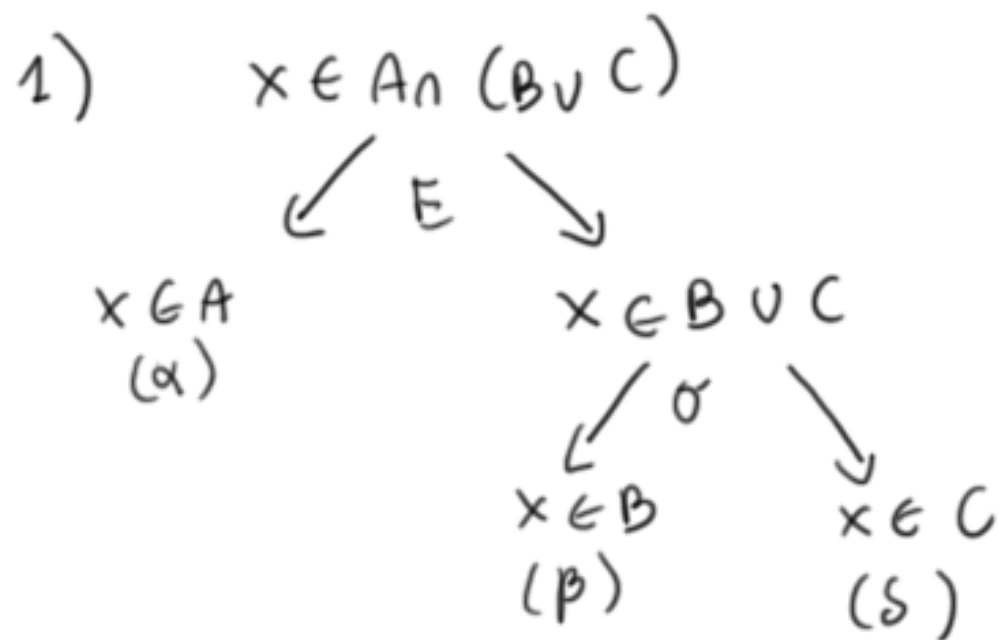
$$f^{-1}: \mathcal{P}(B) \rightarrow \mathcal{P}(A) \quad \text{ESISTE SEMPRE}$$

$$f^{-1}: B \rightarrow A \quad \text{ESISTE SSE } f \text{ È BIIETTIVA}$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$$\Rightarrow 1) A \cap (B \cup C) \subseteq (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$$\Rightarrow 2) (A \cap B) \cup (A \cap C) \subseteq A \cap (B \cup C)$$



CASO 1 vale (β)

$$x \in A \text{ \& } x \in B$$

$\Rightarrow$

$$x \in A \cap B \Rightarrow$$

$$x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

CASO 2 VALE (δ)

$$x \in A \text{ \& } \underline{x \in C}$$

$\Rightarrow$

$$x \in A \cap C$$

$$x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

RELAZIONI DI EQUIVALENZA

$R \subseteq A \times A$ è detta di EQUIVALENZA

SE

1) $\forall a \in A \quad a R a$ RIFLESSIVITÀ

2) $\forall a, b \in A \quad a R b \Rightarrow b R a$ SIMMETRIA

3) $\forall a, b, c \in A \quad (a R b \ \& \ b R c) \Rightarrow a R c$
TRANSITIVITÀ



$\sim \subseteq A \times A$ REL DI EQUIVALENZA

CLASSE DI EQUIVALENZA

$$a \in A \quad [a]_{\sim} = \{b \mid a \sim b\}$$

ESERCIZIO $\forall a \quad [a]_{\sim} \neq \emptyset$

$a \in [a]_{\sim}$ $a \sim a$ RIFL.

$$\sim \subseteq A \times A$$

$$\forall a, b \quad [a]_{\sim} \cap [b]_{\sim} \neq \emptyset \Rightarrow [a]_{\sim} = [b]_{\sim}$$

$$[a]_{\sim} \cap [b]_{\sim} \neq \emptyset \Rightarrow \exists c \quad c \in [a]_{\sim} \& \ c \in [b]_{\sim}$$

$$1) \ c \in [a]_{\sim} \Rightarrow a \sim c$$

$$2) \ c \in [b]_{\sim} \Rightarrow b \sim c \Rightarrow c \sim b \quad \Rightarrow a \sim b \Rightarrow$$

$$a \in [b]_{\sim} \quad b \in [a]_{\sim}$$

$$z \in [a]_{\sim} \quad a \sim z \quad b \sim a \Rightarrow b \sim z \Rightarrow z \in [b]_{\sim}$$

$$[a]_{\sim} \subseteq [b]_{\sim}$$

$$\sim \subseteq A \times A \quad A/\sim = \{ [a]_{\sim} \mid a \in A \}$$

ESERCIZIO

$$\text{sic } f: A \rightarrow B \quad R \subseteq A \times A$$

$$a_1 R a_2 \Leftrightarrow f(a_1) = f(a_2)$$

DIMOSTRARE CHE R È UNA RELAZ. DI EQUIV.

$$1) \text{ RIFL. } \boxed{a R a} \quad f(a) = f(a) \Rightarrow a R a$$

$$2) \text{ SIMM } \boxed{a R b \Rightarrow b R a}$$

$$a R b \Rightarrow f(a) = f(b) \Rightarrow f(b) = f(a) \Rightarrow b R a$$

$$3) \text{ TRANSIT. } \boxed{a R b \ \& \ b R c \Rightarrow a R c}$$

$$\left. \begin{array}{l} a R b \Rightarrow f(a) = f(b) \\ b R c \Rightarrow f(b) = f(c) \end{array} \right\} \Rightarrow f(a) = f(c) \Rightarrow a R c$$

$$R \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$$

$$m R n \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} . m + k = n \Leftrightarrow \exists k \quad m - n = -k$$

R è una REL DI EQUIVALENZA ?

$$R = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \quad -$$

$$1) \quad m R m \quad m + 0 = m$$

$$2) \quad \underbrace{m R n} \Rightarrow n R m$$

$\Downarrow$

$$\exists k \quad m + k = n \Rightarrow n + (-k) = m \Rightarrow n R m$$

$$3) \quad m R n \ \& \ n R p \Rightarrow m R p$$

$$\left. \begin{array}{l} m R n \Rightarrow m + k_1 = n \\ n R p \Rightarrow n + k_2 = p \end{array} \right\} \Rightarrow m + (k_1 + k_2) = p \Rightarrow m R p$$

$$R \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$$

$$m R n \Leftrightarrow \exists p \in \mathbb{N} \quad m+p=n$$

R È DI EQUIVALENZA ?

$$2 R 7 \quad ? \quad \text{sì} \quad 2+5=7$$

$$7 R 2 \quad ? \quad \text{NO}$$

NON È SIMM. $a R b \Rightarrow b R a$