Prof. Lidia Angeleri
Università di Verona, 2012/13
Corso di Laurea in Matematica Applicata

Prova scritta per il Corso di Algebra

5 febbraio 2013

Parte 1

1. Si decida se sono veri o falsi i seguenti enunciati (motivando la risposta).
   (a) $3x + 6$ è irriducibile su $\mathbb{Z}$. (*1 punto*)
   (b) $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}[x]/(x^4 + x + 1)$ è un'estensione di campi di grado 4. (*1 punto*)
   (c) $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}[x]$ è un dominio. (*1 punto*)

2. Si scompongano in fattori irriducibili i seguenti polinomi in $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}[x]$:
   (a) $x^3 + x^2 + x + 1$ (*4 punti*)
   (b) $x^5 - x + 1$ (*4 punti*)

3. Sia R un anello. Si dimostri che un divisore di zero non è mai invertibile.
   (*4 punti*)

vedi retro!!

Parte 2, o seconda prova intermedia

La seconda prova intermedia:
- è rivolta a chi ha superato la prima prova intermedia (ottenendo almeno *9 punti*);
- va consegnata **dopo 60 minuti**;
- si supera se si ottengono almeno *9 punti*.

4. Dati un'estensione di Galois $K \subset F$ e un campo intermedio $K \subset L \subset F$, si discuta quando $K \subset L$ e $L \subset F$ sono estensioni di Galois (seconda parte del Teorema Fondamentale della Teoria di Galois). (*3 punti*)

5. Sia F il campo di riducibilità completa del polinomio $f = x^4 - 11$ su $\mathbb{Q}$.

   (a) Si determini una $\mathbb{Q}$-base di F e si verifichi che $\mathbb{Q} \subset F$ è un'estensione di Galois con $[F : \mathbb{Q}] = 8$. (*3 punti*)

   (b) Si determinino gli elementi di $H = \mathrm{Gal}(F/\mathbb{Q}(\sqrt[4]{11}))$. (*2 punti*)

   (c) Si determinino gli elementi di $H' = \mathrm{Gal}(F/\mathbb{Q}(i))$. (*4 punti*)

   (d) Si verifichi che $H' \cong \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$. (*1 punto*)

   (e) Si decida se $G = \mathrm{Gal}(F/\mathbb{Q})$ è un gruppo abeliano. (*2 punti*)

vedi retro!!