TOPOLOGIA E GEOMETRIA DIFFERENZIALE

a.a. 2011/12 (Prof. M. Spera)

Prova scritta del 17 settembre 2012

* (1) (2) Determinare la coomologia (di de Rham) di Σ_1 = toro  tramite la successione di Mayer-Vietoris associata a $U =$  $V =$ 

($U \cap V =$ )

(3) Dimostrare il teorema di Gauss-Bonnet utilizzando la teoria del grado

(4) In $\mathbb{R}^3$, si consideri la 2-forma

$$\omega = x\,dx \wedge dy + y\,dy \wedge dz + z\,dz \wedge dx .$$

Dire se ω è chiusa e, in caso affermativo, se è esatta ed eventualmente determinarne un "potenziale" a ($\omega = da$). Data poi la trasformazione

$$\varphi : \begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \\ z = z \end{cases}$$

, calcolare $d(\varphi^*\omega)$ e $d(\varphi^* a)$

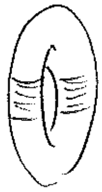
Tempo a disposizione: 1h 15m

Le risposte vanno adeguatamente giustificate

Topogeo
Settembre
2012

★ 1
2
Coomologia di Σ_1 = 
con M-V

$U =$  $V =$ 

$U \cap V =$ 

$H^0(U) = \mathbb{R}$
$H^1(U) = \mathbb{R}$
$H^2(U) = 0$
stessa cosa per V

$H^0(\Sigma_1) = \mathbb{R}$ (connesso) $H^2(\Sigma_2) = \mathbb{R}$ (dualità di Poincaré, ma la verifichiamo)

Calcoliamo $H^1(\Sigma_1)$ con M-V

$$\overset{\mathbb{R}^2}{H^0(U)\oplus H^0(V)} \xrightarrow{f} \overset{\mathbb{R}^2}{H^0(U\cap V)} \xrightarrow{g} H^1(\Sigma_1) \xrightarrow{h} \underset{\tau}{\overset{\mathbb{R}}{H^1(U)}} \oplus \underset{\tau'}{\overset{\mathbb{R}}{H^1(V)}} \xrightarrow{i} \underset{\tau-\tau'}{\overset{\mathbb{R}^2}{H^1(U\cap V)}}$$
$$\tau,\ \tau' \longmapsto \tau - \tau'$$

ora: $\ker i \cong \mathbb{R} \overset{\text{esattezza}}{\Rightarrow} \boxed{\operatorname{Im} h \cong \mathbb{R}}$

$\ker f \cong \mathbb{R} \Rightarrow \operatorname{Im} f \cong \mathbb{R}$ (N+R)

$\mathbb{R} \cong \operatorname{Im} f = \ker g \Rightarrow \operatorname{Im} g \cong \mathbb{R}$ (N+R)

$\mathbb{R} \cong \operatorname{Im} g = \ker h$ $\boxed{\ker h \cong \mathbb{R}}$

pertanto (N+R) $\boxed{H^1(\Sigma_1) \cong \mathbb{R}^2}$

completiamo:
$$\overset{\mathbb{R}^2}{H^1(U)\oplus H^1(V)} \xrightarrow{f} \overset{\mathbb{R}^2}{H^1(U\cap V)} \xrightarrow{g} H^2(\Sigma_1) \xrightarrow{h} \underset{\{0\}}{\underset{\|}{H^2(U)}} \oplus \underset{\{0\}}{\underset{\|}{H^2(V)}}$$

$\ker h = H^2(\Sigma_1)$
$\ker h = \operatorname{Im} g$ (g è suriettiva)
$\ker g = \operatorname{Im} f = \mathbb{R} \Rightarrow$ (N+R) $\boxed{H^2(\Sigma_1) \cong \mathbb{R}}$

③ Dimostrare il teorema di Gauss-Bonnet con la teoria del grado

④ in $\mathbb{R}^3$, si consideri la 2-forma

$$w = x\,dx \wedge dy + y\,dy \wedge dz + z\,dz \wedge dx$$

Dire se w è chiusa e, in caso affermativo, se è esatta ed eventualmente calcolarne una primitiva a ($w = da$)
(potenziale)

Data la trasformazione $\varphi : \begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \\ z = z \end{cases}$ (coord. cil.)

$\rho > 0$
$\varphi \in [0, 2\pi)$

Si calcoli $\quad d\,\varphi^* w \quad$ e $\quad d\,\varphi^* a$

Sol: $\quad d(x\,dx \wedge dy) = dx \wedge dx \wedge dy = 0 \quad$ ecc.

$\Rightarrow$ w è chiusa, ed è esatta in virtù del lemma di Poincaré. Da $\quad x\,dx = d\frac{x^2}{2} \quad$ si ha

$$w = d\frac{x^2}{2} \wedge dy + d\frac{y^2}{2} \wedge dz + d\frac{z^2}{2} \wedge dx$$

$$= d\Big[\underbrace{\frac{x^2}{2}dy + \frac{y^2}{2}dz + \frac{z^2}{2}dx}_{a} \Big]$$

$d\varphi^* w = \varphi^* dw = 0 \qquad$ funtorialità del pull-back

$d\varphi^* a = \varphi^* da = \varphi^* w$

$dx \wedge dy = \ldots \rho\, d\rho \wedge d\varphi$
si ricordi...

$d\rho \sin\varphi + \rho\cos\varphi\, d\varphi$

$= \ldots = \rho\cos\varphi\, (\rho\, d\rho \wedge d\varphi) + \rho\sin\varphi \cdot d(\rho\sin\varphi) \wedge dz$
$\qquad + z\, dz\, \underbrace{d(\rho\cos\varphi)}_{= d\rho\cos\varphi - \rho\sin\varphi\, d\varphi}$

$= \rho^2\cos\varphi\, d\rho \wedge d\varphi + \rho\sin^2\varphi\, \underline{d\rho \wedge dz} + \rho^2\sin\varphi\cos\varphi\, d\varphi \wedge dz$
$\qquad + z\cos\varphi\, \underline{dz \wedge d\rho} - z\rho\sin\varphi\, dz \wedge d\varphi$

$$= \rho^2 \cos\varphi \, d\rho \wedge d\varphi + (\rho \sin^2\varphi - z\cos\varphi)\, d\rho \wedge dz$$
$$+ (\rho^2 \sin\varphi \cos\varphi + z\,\rho \sin\varphi)\, dz \wedge d\varphi$$

$$= \rho^2 \cos\varphi \, d\rho \wedge d\varphi + (\rho \sin^2\varphi - z\cos\varphi)\, d\rho \wedge dz$$
$$+ \rho \sin\varphi\, (\rho\cos\varphi + z)\, dz \wedge d\varphi$$