TRACCIA DELLE SOLUZIONI DEI PROBLEMI DELL'ESAME DEL 9/2/2011

Esercizio 1 *a. Dopo aver scritto l'equazione parametrica $\boldsymbol{C}(t)$ della parabola di equazione cartesiana*

$$y \;=\; x^2,$$

si calcolino i vettori $\boldsymbol{T}(t)$, $\boldsymbol{N}(t)$ e $\boldsymbol{B}(t)$, e la curvatura della parabola in funzione del parametro t.
b. Quanto vale la curvatura massima, e in quale parte della parabola si trova? Si disegnino la parabola e, dopo averli determinati, i cerchi osculatori per $t \;=\; 0$ e $t \;=\; 1$.
c. Infine, posto $s(t) \;= 1/2 - |t/4|$, si descriva e si rappresenti la superficie parametrica 3D di equazione

$$\boldsymbol{S}(t,v) \;=\; \boldsymbol{C}(t) \;+\; s(t)\cos v\,\boldsymbol{N}(t) \;+\; s(t)\sin v\,\boldsymbol{B}(t), \quad -2 \le t \le 2, \quad 0 \le v \le 2\pi$$

Soluzione. La curva sta sul piano xy, l'equazione parametrica usuale è

$$\mathbf{C}(t) = (t,\ t^2,\ 0).$$

Poiché $\mathbf{v}(t) = (1,\ 2t,\ 0)$ e $\|v(t)\| = \sqrt{1+4t^2}$,

$$\mathbf{T}(t) = \frac{1}{\sqrt{1+4t^2}}(1,\ 2t,\ 0),$$

$$\mathbf{N}(t) = \frac{1}{\sqrt{1+4t^2}}(-2t,\ 1,\ 0),$$

$$\mathbf{B}(t) = (0,\ 0,\ 1).$$

L'accelerazione è $\mathbf{a}(t) = (0,\ 2,\ 0)$ e la curvatura

$$\kappa(t) = \frac{2}{(1+4t^2)^{3/2}}.$$

Ovviamente, la curvatura è massima quando il denominatore è minimo, cioè quando $t = 0$; in

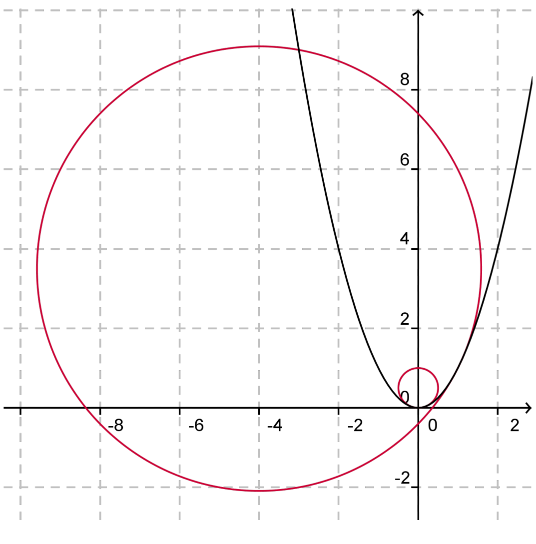

Figura 1: Cerchi osculatori

tal caso la curvatura vale 2. Per $t = 0$ il cerchio osculatore ha perciò raggio $1/2$ e centro in $(0, 1/2)$, mentre per $t = 1$ ha raggio $5\sqrt{5}/2$ e centro in $(-4,\ 7/2)$ (fig. 1).
Il raggio della sezione della superficie proposta varia linearmente da un massimo di $1/2$ in corrispondenza del vertice della parabola, ad un minimo di 0 alle estremità.

Esercizio 2 *Sia S la superficie di equazione*

$$z = f(x, y) = x^2 - 3y^2 + y^6.$$

a. Scrivere un'equazione del piano tangente a S nel punto $P = (1; 1; -1)$.
b. Determinare i massimi e minimi relativi di $f(x, y)$.
c. Determinare i massimi e minimi assoluti di $f(x, y)$ *nel cerchio* $x^2 + y^2 \leq 1$.

Soluzione. Risulta $\partial f/\partial x = 2x$ e $\partial f/\partial y = -6y + 6y^5$; perciò il piano tangente ha equazione $z - (-1) = 2(x - 1) + 0(y - 1)$, ossia $z = 2x - 3$.
In $\mathbb{R}^2$, in base al segno dell'Hessiano, risultano punti di minimo relativo $A = (0, -1)$ e $B = (0, 1)$, in cui la funzione vale -2, mentre $O = (0, 0)$ è punto di sella.
Sul contorno, che già contiene A e B, la parametrizzazione usuale della circonferenza porta a

$$f(t\ ) = \ \cos^2 t - 3\sin^2 t + 6\sin^6 t \ = \ 1 - 4\sin^2 t + \sin^6 t.$$

La derivata

$$f'(t) \ = \ 2\sin t\cos t(-4 + 3\sin^4 t)$$

si annulla per $t \in \{0,\ \pi/2,\ \pi,\ 3/2\pi\}$ ossia nei punti A,B, $C = (1, 0)$ e $D = (-1, 0)$; questi ultimi due sono di massimo assoluto nel cerchio dato, mentre i primi due sono di minimo assoluto.

Esercizio 3 *Si consideri il solido*

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z \geq x^2 + y^2,\ x^2 + y^2 \leq 1,\ z \leq 4\}.$$

a. Descriverne la frontiera e calcolarne il volume (si ricorda che $z = x^2 + y^2$ *è la superficie che si ottiene dalla rotazione di* $z = x^2$ *attorno l'asse z).*
b. Servendosi del teorema della divergenza calcolare il flusso del campo $\boldsymbol{F} = x\boldsymbol{i}$ *uscente da ogni superficie che delimita V .*

Soluzione. Il solido (fig. 2) è intersezione di tre insiemi: nell'ordine dato dalla definizione,

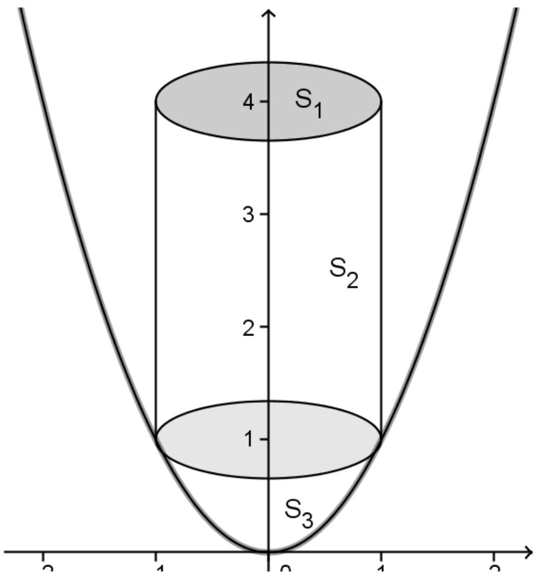

Figura 2: Il solido V

l'insieme dei punti che stanno 'sopra' il paraboloide di rotazione che ha vertice nell'origine,

l'insieme dei punti interni al cilindro di asse l'asse z, l'insieme dei punti del semispazio $z \leq 4$.
Il volume della parte cilindrica è $V_c = 3\pi$, mentre quello della parte paraboloidale è $V_p = \pi/2$.
Poiché $\nabla\mathbf{F} \ = \ 1$, la divergenza sull'intero volume vale $7/2\pi$.
Attraverso la superficie S_1, che è parallela al campo $\mathbf{F}$, il flusso è nullo; attraverso S_2, superficie laterale del cilindro, vale $1 \cdot V_c = 3\pi$, e, per differenza, il flusso attraverso S_3 vale $\pi/2$.

Esercizio 4 *Si consideri il campo vettoriale*

$$\boldsymbol{F} = y\boldsymbol{i} - x\boldsymbol{j}.$$

Sia Γ *la curva di equazione*

$$\Gamma : \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x + y + z = 0. \end{cases}$$

Calcolare il lavoro compiuto da $\boldsymbol{F}$ *lungo* Γ *in due modi: applicando la definizione e usando il Teorema di Stokes.*

Soluzione. Usando la solita parametrizzazione del cerchio $x^2 + y^2 \ = \ 1$, e ricavando z dalla seconda equazione di $|Gamma$, la curva risulta parametrizzata da

$$\Gamma(t) \ = \ (\cos t, \ \sin t, \ -\cos t - \sin t).$$

Usiamo la definizione. Risulta

$$d\mathbf{s} \ = \ (-\sin t, \ \cos t, \ \sin t - \cos t)dt$$

e

$$\mathbf{F}(t) = (\sin t, \ -\cos t, \ 0).$$

Quindi

$$\oint_\Gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} \ = \ \oint_0^{2\pi} (\sin t, \ -\cos t, \ 0) \cdot (-\sin t, \ \cos t, \ \sin t - \cos t) \ dt = -2\pi.$$

Usiamo il Teorema di Stokes. Dobbiamo calcolare, indicando con S la superficie delimitata da

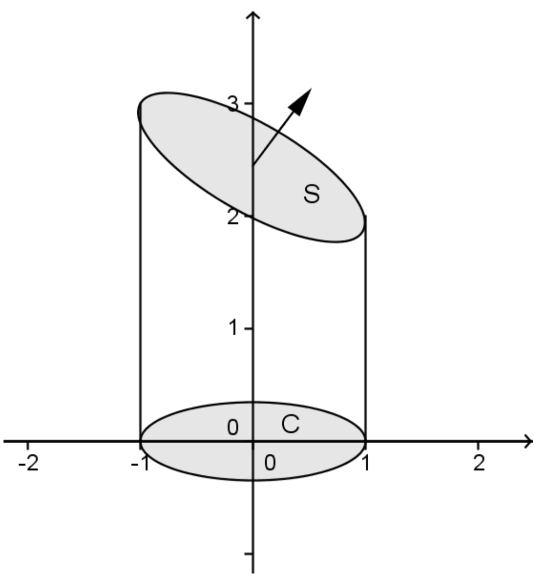

Figura 3: La superficie S e la sua proiezione C.

Γ,

$$\int_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S},$$

dove $d\mathbf{S}$ è l'elemento (orientato) di superficie, riferito a S.
Il rotore di $\mathbf{F}$, $\nabla \times \mathbf{F}$, è costante, e vale $-2\mathbf{k}$. La componente dell'elemento di superficie $d\mathbf{S}$ rispetto al versore $\mathbf{k}$ è $\mathbf{k}dxdy$, ossia l'elemento di superficie riferito al cerchio C, proiezione di S nella direzione di $\mathbf{k}$. Pertanto abbiamo

$$\int_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \int_C (-2\mathbf{k}) \cdot \mathbf{k}dxdy \;=\; -2\int_C dxdy \;=\; -2area(C) \;=\; -2\pi.$$

Esercizio 5 *Risolvere le seguenti equazioni differenziali:*

a. $y'' - 3y' + 2y = 14\sin(2x) - 18\cos(2x)$,

b. $(x \ln x)y' + y = 3x^2$.

Soluzione.

a. La soluzione generale è

$$y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + 2\sin 2x + 3\cos 2x.$$

b. L'equazione è lineare del primo ordine, a coefficienti non costanti. Il fattore integrante è

$$\mu(x) = \int \frac{1}{x \ln x} dx = \ln|\ln x|,$$

per cui $e^{\mu(x)} = e^{\ln|\ln x|} = \ln(x)$ e $e^{-\mu(x)} = e^{-\ln|\ln x|} = 1/\ln(x)$.
Da questo segue facilmente la soluzione

$$y(x) = \frac{3x^2 + C}{2\ln x}.$$