

Foglio di Esercizi n°7 - 23/11/2016
(Da consegnare il giorno 7/12/2016)

Esercizio 1

- 1) (5 punti) Sia $\alpha \in \mathbb{C}$ algebrico di grado dispari su \mathbb{Q} . Dimostrare che $\mathbb{Q}(\alpha) = \mathbb{Q}(\alpha^2)$.
- 2) (5 punti) Sia $\alpha \in \mathbb{C}$ e sia $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$ un polinomio non costante. Dimostrare che α è algebrico su \mathbb{Q} se e solo se $f(\alpha)$ è algebrico su \mathbb{Q} .

Esercizio 2

Sia $u = \sqrt{2 + \sqrt{5}} \in \mathbb{C}$.

- 1) (4 punti) Determinare il polinomio minimo f di u su \mathbb{Q} .
- 2) (4 punti) Scrivere l'elemento $\frac{u+1}{u}$ di $\mathbb{Q}(u)$ come polinomio in u .
- 3) (4 punti) Sia E il campo di riducibilità completa di f su \mathbb{Q} . Calcolare il grado di E su \mathbb{Q} .

Esercizio 3

Sia $K \subset F$ un'estensione algebrica e sia $K \subset L \subset F$ un campo intermedio.

- 1) (4 punti) Dimostrare che se $K \subset F$ è un'estensione normale, allora $L \subset F$ è normale.
- 2) (4 punti) Dimostrare che se $K \subset F$ è un'estensione separabile, allora $K \subset L$ e $L \subset F$ sono estensioni separabili.