Università degli Studi di Verona Anno Accademico 2016-2017
CL in Matematica Applicata
Algebra

Foglio di Esercizi n°2 - 19/10/2016

(Da consegnare il giorno 26/10/2016)

Esercizio 1

Sia H il sottogruppo del gruppo alterno A_5 generato dalle permutazioni $(1\ 2)(3\ 4)$ e $(1\ 3\ 5)$.

1) (*3 punti*) Dimostrare che H contiene un elemento di ordine 5.

2) (*2 punti*) Dedurre che l'ordine di H è divisibile per 30.

3) (*3 punti*) Dedurre che $H = A_5$.

4) (*4 punti*) Dimostrare che il sottogruppo commutatore $K(S_5)$ è uguale ad A_5.

   [*Suggerimento: basta dimostrare che* $K(S_5)$ *contiene gli elementi* $(1\ 2)(3\ 4)$ *e* $(1\ 3\ 5)$*; per fare questo, utilizzare il fatto che due permutazioni di* S_5 *sono coniugate*[1] *se e solo se ...*]

Esercizio 2

Consideriamo l'applicazione $\varphi\colon \mathbb{Z}[X] \to \mathbb{Z}/11\mathbb{Z}$ definita ponendo $\varphi(f) = f(0) + 11\mathbb{Z}$.

1) (*3 punti*) Dimostrare che φ è omomorfismo di anelli.

2) (*3 punti*) Determinare il nucleo di φ e dimostrare che non è un ideale principale.

3) (*2 punti*) Dimostrare che il nucleo di φ è un ideale massimale.

Esercizio 3

Consideriamo il sottoanello del campo complesso

$$\mathbb{Z}[\sqrt{-7}] = \{a + b\sqrt{-7} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}.$$

1) (*4 punti*) Determinare un omomorfismo suriettivo $\varphi\colon \mathbb{Z}[X] \to \mathbb{Z}[\sqrt{-7}]$ tale che $\mathrm{Ker}(\varphi) = (x^2 + 7)$.

2) (*2 punti*) Dedurre che gli anelli $\mathbb{Z}[\sqrt{-7}]$ e $\mathbb{Z}[X]/(x^2 + 7)$ sono isomorfi.

[1] Due permutazioni σ e τ di S_n si dicono *coniugate* (in S_n) se esiste una permutazione δ di S_n tale che $\delta\sigma\delta^{-1} = \tau$.

3) (*4 punti*) Consideriamo gli ideali $I = (x)$, $J = (x, 7)$ dell'anello $\mathbb{Z}[X]$. Dimostrare che:

i) $I \neq J$, ma $\varphi(I) = \varphi(J)$;

ii) $\varphi^{-1}(\varphi(J)) = J$, mentre $\varphi^{-1}(\varphi(I) \neq I$.