Prof. Lidia Angeleri, Dr. Jorge Vitória
Università di Verona, 2015/2016
Corso di Laurea in Matematica Applicata

Esercizi per il Corso di ALGEBRA

Foglio 8
7 dicembre 2015

1. Siano n e m numeri interi e si consideri l'anello $R_{(m,n)} := \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$. Sia $G_{(m,n)} = R^*_{(m,n)}$ il gruppo multiplicativo degli elementi invertibili.

   (a) (**1 punto**) Si dimostri che l'ordine di $G_{(m,n)}$ è $\phi(n)\phi(m)$ (dove ϕ è la funzione di Eulero).

   (b) (**2 punti**) Si determinino gli elementi di $G_{(4,6)}$ e si esibisca un'isomorfismo tra $G_{(4,6)}$ e $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

   (c) (**2 punti**) Si trovino due interi $m > 1$ e $n > 1$ tale che $G_{(m,n)}$ sia ciclico e si esibisca, per quella scelta, un generatore di $G_{(m,n)}$.

2. Sia R un anello commutativo e I e J ideali di R tali che $I + J = \{i + j : i \in I, j \in J\} = R$.

   (a) (**2 punti**) Si dimostri che $IJ = I \cap J$, dove $IJ = \{\sum_{k=1}^{n} i_k j_k : i_k \in I, j_k \in J, n \in \mathbb{N}\}$.

   (b) (**3 punti**) Si dimostri che l'applicazione
   $$f : R \to R/I \times R/J, x \mapsto (x+I, x+J)$$
   induce un isomorfismo $R/IJ \cong R/I \times R/J$.

   (c) Siano $R = \mathbb{Z}$, $I = n\mathbb{Z}$, $J = m\mathbb{Z}$.

      i. (**1 punto**) Si osservi che $I + J = \mathbb{Z}$ se e solo se $MCD(n,m) = 1$ e si concluda che se $MCD(n,m) = 1$, allora $\mathbb{Z}/nm\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$.

      ii. (**2 punti**) Siano $m, n \in \mathbb{Z}$ tali che $MCD(m,n) = 1$. Dati $a, b \in \mathbb{Z}$, si trovi $x \in \mathbb{Z}$ tale che $x + n\mathbb{Z} = a + n\mathbb{Z}$ e $x + m\mathbb{Z} = b + m\mathbb{Z}$.

      iii. (**2 punti**) Si risolva il problema di Sun-Tsu (Cina, I secolo a.C.): si determini un numero naturale x con resto 2 se diviso per 3, resto 3 se diviso per 5, e resto 2 se diviso per 7.

3. Sia $K \subset F$ un'estensione algebrica e sia $K \subset L \subset F$ un campo intermedio.

   (a) (**3 punti**) Si dimostri che se $K \subset F$ è un'estensione normale, allora $L \subset F$ è anche normale.

   (b) (**4 punti**) Si dimostri che se $K \subset F$ è un'estensione separabile, allora $K \subset L$ e $L \subset F$ sono estensioni separabili.

4. Sia $z = e^{\frac{2i\pi}{6}} = \cos\frac{2\pi}{6} + i \sin\frac{2\pi}{6}$.

   (a) (**3 punti**) Si dimostri che $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(z)$ è un'estensione normale.

   (b) (**3 punti**) Si dimostri $[\mathbb{Q}(z) : \mathbb{Q}] = 2$ e si trovi il polinomio minimo di z su $\mathbb{Q}$.

5. (**4 punti**) L'anello quoziente $\mathbb{Z}[i]/(2+3i)$ è un campo? Se sì, si determini la sua caratteristica.

6. Sia F il campo di riducibilità completa del polinomio $f = x^3 - 5$ su $\mathbb{Q}$.

   (a) (**3 punti**) Si dimostri che $G = \mathrm{Gal}(F/\mathbb{Q}) \cong S_3$.

   (b) (**3 punti**) Si determini un elemento primitivo α di $\mathbb{Q} \subset F$ e il suo polinomio minimo su $\mathbb{Q}$.

(c) (**3 punti**) Si determini il gruppo di Galois $H = \mathrm{Gal}(F/\mathbb{Q}_3)$, dove $\mathbb{Q}_3$ è il campo di riducibilità completa del polinomio $g = x^3 - 1$ su $\mathbb{Q}$. È un sottogruppo normale di G?

(d) (**3 punti**) Si consideri il sottogruppo A_3 delle permutazioni pari di S_3. Si dimostri che $\mathrm{Fix}_F\, H$ è il campo di riducibilità completa di $x^3 - 1$ su $\mathbb{Q}$.

7. Siano $K = \mathbb{Q}$, $F = \mathbb{Q}(i, \sqrt[4]{2})$ e $\alpha = \sqrt[4]{2}$.

   (a) (**3 punti**) Si mostri che $K \subset F$ è un'estensione di Galois verificando che F è campo di riducibilità completa di un polinomio separabile su K.

   (b) (**2 punti**) Si verifichi che $[K(\alpha) : K] = 4$ e $[F : K] = 8$.

   (c) (**3 punti**) Si considerino i campi intermedi $K(\alpha)$ e $K(i)$. Si dimostri che esistono $\sigma, \tau \in \mathrm{Gal}(F/K)$ tali che $\sigma(i) = i$, $\sigma(\alpha) = i\alpha$, e $\tau(\alpha) = \alpha$, $\tau(i) = -i$.

   (d) (**2 punti**) Si dimostri $\sigma^4 = 1 = \tau^2$ e $\tau\sigma = \sigma^3\tau$.

   (e) (**3 punti**) Si determinino tutti gli elementi di $\mathrm{Gal}(F/K)$.

   (f) (**3 punti**) Si determinino tutti i sottogruppi di $\mathrm{Gal}(F/K)$.

Consegna: martedí 12 gennaio, 10:30, all'inizio delle esercitazioni