CARDINALITÁ

S quanto è "grande" S

$\Downarrow$

"CONTARE"

A è finito $\Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}, \exists f$ biiett.

$$f : I_n \to A$$

$$A = \{\heartsuit, \diamondsuit, \clubsuit, \spadesuit\}$$

$$I_3 \leftrightarrow A$$

$$f(\heartsuit) = 0$$
$$f(\clubsuit) = 1$$
$$f(\diamondsuit) = 2$$
$$f(\spadesuit) = 3$$

$c(A)$ $[\,|A|, \#(A)\,]$

A, B hanno la stessa cardinalità

$$\boxed{\begin{array}{l} c(A) = c(B) \quad [A, B \text{ SONO EQUIPOTENTI}] \\ \quad\quad \Leftrightarrow \\ \exists f : A \to B \quad \text{BIIETTIVA} \end{array}}$$

1) $C(A) \equiv C(A)$

2) $C(A) \equiv C(B)$ & $C(B) \equiv C(D) \Rightarrow C(A) \equiv C(D)$

3) $C(A) \equiv C(B) \Rightarrow C(B) \equiv A$

a) comp. di funz. biiettive è biiettiva

b) le funz. biiettive hanno inversa biiettiva

1) $c(A) \equiv c(A)$

2) $c(A) \equiv c(B)$ & $c(B) \equiv c(D) \Rightarrow c(A) \equiv c(D)$

3) $c(A) \equiv c(B) \Rightarrow c(B) \equiv c(A)$

a) comp. di funz. biiettive è biiettiva

b) le funz. biiettive hanno inversa biiettiva

1 $id_A(x) = x$

2 $f: A \to B$ biiett $\quad g: B \to D$ biiett.

$g \circ f: A \to D$ (a) è biiett. $\quad c(A) \equiv c(D)$

3 $f: A \to B$ biiett $\Rightarrow f^{-1}: B \to A$ è biiett

$\Rightarrow c(B) \equiv c(A)$

NOT $A \equiv B$

$c(A) = c(B)$

1) $A \equiv A$

2) $A \equiv B$ & $B \equiv D \Rightarrow A \equiv D$

3) $A \equiv B \Rightarrow B \equiv A$

a) comp. di funz. biiettive è biiettiva

b) le funz. biiettive hanno inversa biiettiva

1. $id_A(x) = x$

2. $f: A \to B$ biiett $\quad g: B \to D$ biiett.

$g \circ f : A \to D$ (a) è biiett. $\quad A \equiv D$

3. $f: A \to B$ biiett $\Rightarrow f^{-1}: B \to A$ è biiett

$\Rightarrow B \equiv A$

A è finito $I_n \leftrightarrow A$ per un $n \in \mathbb{N}$

$c(A) = n+1$

<u>TEOR</u> $B \subsetneq A$ e A è finito

allora $c(B) \neq c(A)$

$f: A \to B$ $\quad (g \circ f)(x) = g(f(x))$

$g: B \to C$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "g \circ f"'] & B \arrow[r, "g"] & C \end{tikzcd}$$

DIM. CHE SE g, f SONO INIETTIVE
ALLORA $g \circ f$ È INIETTIVA

$(g \circ f)(x) = (g \circ f)(y) \Rightarrow x = y$] QUELLO CHE DEVE ESSERE DIMOSTRATO

$(g \circ f)(x) = (g \circ f)(y) \Rightarrow g(\underbrace{f(x)}_{z}) = g(\underbrace{f(y)}_{w}) \overset{\text{INIETT DI } g}{\Longrightarrow} f(x) = f(y) \Rightarrow$

PER INIETT DI f

$\Longrightarrow \quad x = y$

$f: A \to B$ È SURG.
$g: B \to C$ È SURG $\Rightarrow g \circ f : A \to C$ È SURG.

$$\boxed{\forall c \in C \ \exists a \in A \ (g \circ f)(a) = c}$$

$$c \in C \Rightarrow \exists b \in B \ \boxed{g(b) = c} \Rightarrow$$

b

$$\Rightarrow \exists b \in B \left(g(b) = c \ \& \ \exists a \in A \ f(a) = b \right)$$

$$\Rightarrow \exists a \in B \ g(f(a)) = c \Rightarrow (g \circ f)(a) = c$$

$A \quad , B \qquad f: A \to B$

$\bar{A} \subseteq A$

$f_{|\bar{A}} : \bar{A} \to B$

$f_{|\bar{A}}(x) = f(x)$

TEOREMA

$\mathbb{N}$ è UN INSIEME INFINITO

DIM. PER ASSURDO

$\exists n \; \exists f \quad f: \mathbb{N} \to I_n$ biiettiva

$f_{|I_n}: I_n \to I_n \qquad imm(f_{|I_n}) \subsetneq I_n$

ovviamente $f_{|I_n}$ non è suriettiva

$f_{|I_n}$ è INIETTIVA $\qquad f_{|I_n}: I_n \to imm(f_{|I_n})$ SURGETT.

ASSURDO

$g: A \to B$ INIETTIVA

$g: A \to imm(g)$

È INIETTIVA

E SURGETTIVA

$imm(g) =$

$= \{ b \mid b \in B \;\&\; \exists a \in A \;\; g(a) = b \}$

$g: A \to B \qquad \bar{A} \subseteq A \qquad g$ è INIETT.

allora $g_{|\bar{A}}: \bar{A} \to B$

È INIETTIVA

$c(\mathbb{N}) = \aleph_0$

UN INSIEME A È DETTO NUMERABILE SE $c(A) = \aleph_0$

OVVERO A È IN CORR. BIUNIVOCA CON $\mathbb{N}$

OVVERO $\exists\, f$ biiettiva $f : A \to \mathbb{N}$

$f : \mathbb{N} \to A$

$$\lim_{x \to \infty} x = \infty$$

$$\lim_{x \to \infty} \lg_e x = \infty$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\lg_e x}{x} = 0 \qquad \lim_{x \to \infty} \frac{x}{\lg_e x} = \infty$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\overbrace{3x^2 + x}^{\to\infty}}{\underbrace{x^2 + 100x}_{\to\infty}} = 3$$

$\psi : \mathcal{P}(A) \to A$

$\forall X \in \mathcal{P}(A) \quad \psi(X) \in X$

FUNZIONE DI SCELTA

OGNI INSIEME INFINITO CONTIENE UN SOTTOINSIEME NUMERABILE

X insieme infinito

$a_0 = \psi(X) \quad [\psi : \mathcal{P}(X) \to X]$

$a_1 = \psi(X - \{a_0\})$

$a_2 = \psi(X - \{a_0, a_1\})$

$\vdots$

$a_k = \psi(X - \{a_0, \ldots a_{k-1}\})$

$\vdots$

UNA SUCC $(a_i)_{i \in \mathbb{N}}$ su $\mathbb{R}$

E UNA funzione

$a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$

$a(i) \quad a_i$

$a : \mathbb{N} \to X$ iniettiva

$a : \mathbb{N} \to imm(a) \subseteq X$

biett.

OGNI SOTTOINSIEME INFINITO
DEI NUMERI NATURALI
È NUMERABILE

OGNI SOTT. $B \subseteq \mathbb{N}$ HA MINIMO $(\min(B))$

$B \subseteq \mathbb{N}$ e B infinito

$a_0 = \min(B)$

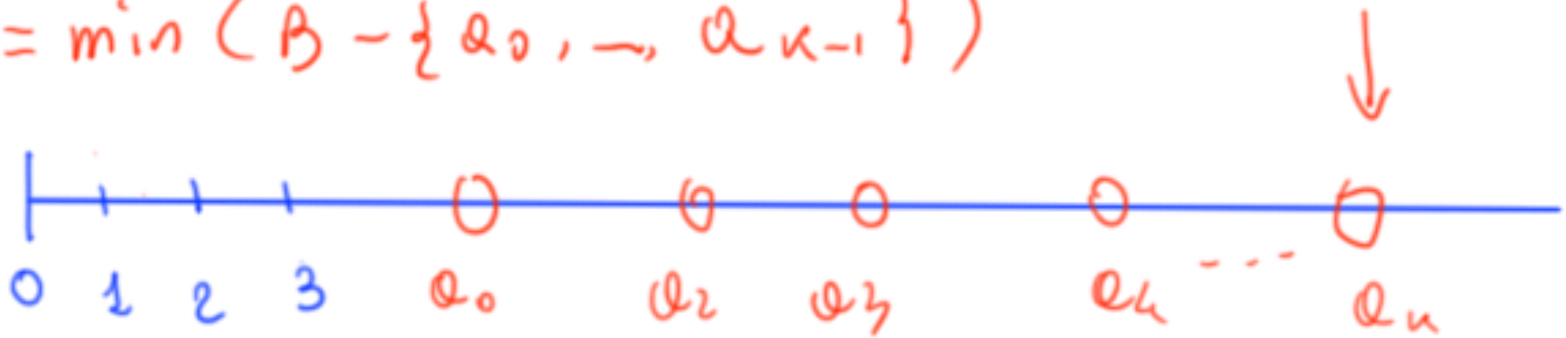
$a_1 = \min(B - \{a_0\})$

$\vdots$

$a_k = \min(B - \{a_0, \dots, a_{k-1}\})$

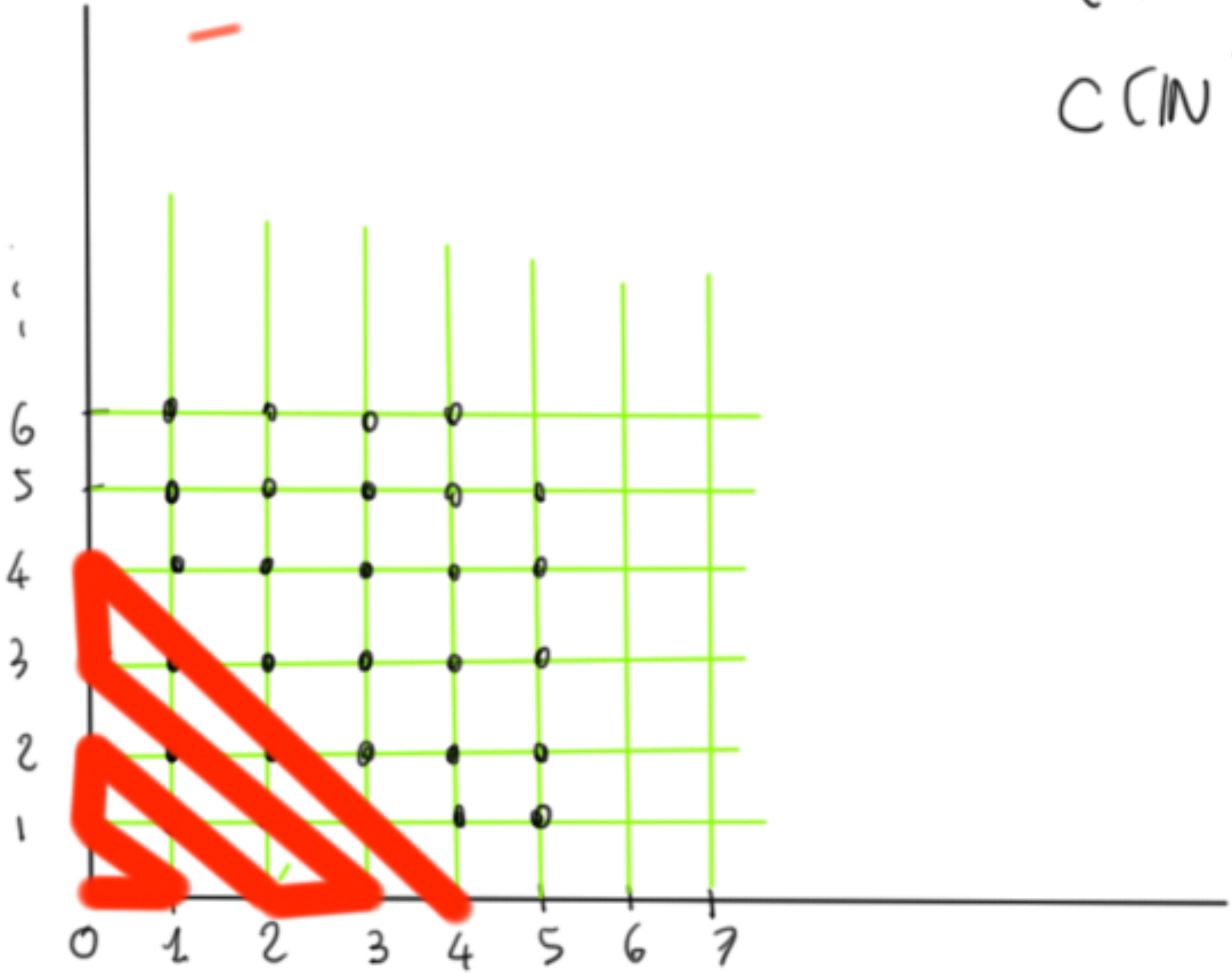
$\vdots$

$a : \mathbb{N} \to B$
biettiva



$\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ È NUMERABILE

$c(\mathbb{N} \times \mathbb{N}) =$
$c(\mathbb{N}) = \aleph_0$



$c(\mathbb{Z}) = c(\mathbb{N})$

$P = \{ n \mid \mathbb{N}$ t.c. n è pari $\}$

$c(P) = \mathbb{N}$

$f : \mathbb{N} \to P$ BIIETTIVA

$f(n) = 2 \cdot n$

1) $f(n) = f(m) \Rightarrow n = m$? $\quad f(n) = f(m) \Rightarrow$

$2n = 2m \Rightarrow n = m$

2) $\forall x \in P \ \exists n \ f(n) = x$?

$x \in P \Rightarrow \exists n \ x = 2n \quad \Rightarrow \exists n \ x = f(n)$

$\mathbb{Z}$ é numerabile

x è DISPARI $\Leftrightarrow \exists m \; 2m+1=x$

$f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$

$\forall m \geq 0 \quad f(m) = 2m$

$\forall n < 0 \quad f(n) = |2n+1|$

$-1 \Rightarrow 1$

$-2 \Rightarrow 3$

$-3 \Rightarrow 5$

$\vdots$

$c(\mathbb{Q}) = c(\mathbb{N})$

$\mathbb{Q}^{\geq 0}$ $\qquad \dfrac{m}{n}$ $\qquad \left\{ \dfrac{m}{1} \middle| m \in \mathbb{N} \right\}$

$\mathbb{Q}^{< 0}$

$\mathbb{R}$ ~~non~~ sono numerabili

$\mathbb{R}_I \qquad \mathbb{R}_{[a,b]} = \{x \mid x \in \mathbb{R} \ a \leq x \leq b\}$

$\mathbb{R}_{[a,b)} = \{x \mid x \in \mathbb{R} \ a \leq x < b\}$

1 $c(\mathbb{R}^{\geq 0}) = c(\mathbb{R}_{[0,1)})$

$c(\mathbb{R}) = c(\mathbb{R}_{(-1,1)}) = c(\mathbb{R}_{[0,1)})$

$c(\mathbb{R}) = c(\mathbb{R}_I)$ I intervallo dei reali