Esercizi di Programmazione Lineare

Esercizio n.1

Dato il problema

$$\begin{cases} \min(-2x_1 - 4x_2) \\ x_1 + x_2 \geq 1 \\ x_1 + 2x_2 \leq 3 \\ -x_1 + x_2 \leq 1 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

i) rappresentare e risolvere il problema geometricamente e successivamente scriverlo in forma standard;
ii) determinare i vertici e le soluzioni di base del problema, specificando quali sono degeneri e quali non degeneri;
iii) risolvere il problema con l'algoritmo del simplesso. La soluzione ottima è unica?

Esercizio n.2

Si consideri il seguente problema di Programmazione Lineare:

$$P \quad \begin{cases} \min(-x_1 - 2x_2) \\ -x_1 + 4x_2 \leq 4 \\ x_1 - x_2 \leq 2 \\ 2x_1 + x_2 \geq 2 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases} .$$

i) Rappresentare e risolvere il problema geometricamente e successivamente scriverlo in forma standard;
ii) determinare tutte le soluzioni di base ammissibili e le corrispondenti matrici di base;
iii) determinare una soluzione di base non ammissibile;
iv) risolvere il problema P con l'algoritmo del simplesso;
v) scrivere e risolvere il duale di P.

Esercizio n.3

Si consideri il seguente problema di Programmazione Lineare:

$$P \quad \begin{cases} \min(-2x_1 - x_2) \\ -4x_1 + x_2 \leq 3 \\ 2x_1 + x_2 \geq 3 \\ 2x_1 - 4x_2 \leq 6 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases} .$$

i) Rappresentare e risolvere il problema geometricamente, successivamente scriverlo in forma standard;

ii) dire se il problema ha soluzioni di base degeneri ed in caso affermativo determinarle;
iii) risolvere il problema P con l'algoritmo del simplesso;
iv) scrivere il duale del problema P e determinare la sua regione ammissibile;
v) sia P' il problema ottenuto da P sostituendo la funzione obiettivo con $c_1x_1 + c_2x_2$. Determinare tutti i valori di c_1 e c_2 per cui P' ha come soluzione ottima la soluzione di base $x_B = (x_1, x_3, x_4), x_N = (x_2, x_5)$

Esercizio n.4

Si consideri il seguente problema di Programmazione Lineare:

$$\text{P:} \quad \begin{cases} \min(x_1 - 2x_2) \\ 5x_1 + 3x_2 \le 20 \\ -3x_1 + x_2 \le 2 \\ -x_1 - 2x_2 \le -4 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}.$$

a) Rappresentare e risolvere il problema geometricamente; successivamente scriverlo in forma standard.
b) Dire se esistono soluzioni di base degeneri e in caso affermativo determinarle, mostrando che per esse non c'è corrispondenza biunivoca con le matrici di base.
c) Risolvere il problema P con l'algoritmo del simplesso.
d) Scrivere e risolvere il duale di P.
e) Sostituire la funzione obiettivo di P con $(c_1x_1 + c_2x_2)$ e determinare tutti i valori di c_1 e c_2 per i quali rimane ottima la soluzione trovata al punto c).

Esercizio n.5

Si consideri il seguente problema di Programmazione Lineare:

$$\begin{cases} \min(-2x_1 + 3x_2) \\ x_1 - 2x_2 \le 2 \\ 2x_1 - x_2 \ge -2 \\ x_1 - x_2 \le 4 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}.$$

a) Rappresentare e risolvere il problema geometricamente; successivamente scriverlo in forma standard.
b) Determinare una soluzione di base in cui la funzione obiettivo assume valore = 0 ed una in cui assume valore < 0. Le due soluzioni di base sono adiacenti?
c) Risolvere il problema con l'algoritmo del simplesso.
d) Come si modifica la soluzione ottima del problema se la funzione obiettivo viene sostituita con $-2x_1 - 2x_2$?

Esercizio n.6

Si consideri il seguente problema di Programmazione Lineare:

P $\begin{cases} \min(2x_1 - x_2) \\ 4x_1 - 2x_2 \geq -1 \\ x_1 - x_2 \leq 2 \\ x_1 + x_2 \leq 2 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$.

i) Rappresentare e risolvere il problema geometricamente, successivamente scriverlo in forma standard;
ii) determinare tutte le basi ammissibili e i vertici della regione ammissibile di P;
iii) dire, giustificando la risposta, se c'è corrispondenza biunivoca tra le basi ammissibili e i vertici;
iv) determinare la soluzione di base $x_B = (x_1, x_2, x_5), x_N = (x_3, x_4)$ e dire se è ammissibile o no;
v) risolvere il problema P con l'algoritmo del simplesso, determinando **tutte** le soluzioni ottime;
vi) scrivere il duale del problema P e determinare una sua soluzione ottima.

Esercizio n.7

Si consideri il seguente problema di Programmazione Lineare:

P: $\begin{cases} \min(-2x_1 - 4x_2) \\ x_1 + x_2 \geq 1 \\ x_1 + 2x_2 \leq 3 \\ -x_1 + x_2 \leq 1 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$.

i) Rappresentare e risolvere il problema geometricamente; successivamente scriverlo in forma standard;
ii) determinare le soluzioni di base del problema, specificando quali sono degeneri e quali non degeneri. Per le soluzioni degeneri, determinare tutte le matrici di base associate;
iii) determinare una base non ammissibile;
iv) risolvere il problema P con l'algoritmo del simplesso. La soluzione ottima è unica?
v) Scrivere e risolvere il duale di P;
vi) sostituire nel problema P la funzione obiettivo con $c_1x_1 + c_2x_2$ e determinare tutti i valori di c_1 e c_2 per cui la soluzione ottima di P è la soluzione di base $x_B = (x_1, x_3, x_5)$, $x_N = (x_2, x_4)$. Inoltre, dire se esistono valori di c_1 e c_2 per cui il duale ha regione ammissibile vuota.

Esercizio n.8

Si consideri il seguente problema di Programmazione Lineare:

P: $\begin{cases} \min(-x_1 - 2x_2) \\ x_1 - x_2 \leq 1 \\ x_1 + x_2 \leq 3 \\ x_1 - 2x_2 \geq -2 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$.

i) Rappresentare e risolvere il problema geometricamente; successivamente scriverlo in forma standard;
ii) determinare tutti i vertici della regione ammissibile e per ciascuno di essi determinare la corrispondente soluzione di base;
iii) determinare una base non ammissibile;
iv) risolvere il problema P con l'algoritmo del simplesso;
v) scrivere e risolvere il duale di P;
vi) determinare tutti i valori del termine noto b_2 (3) per i quali rimane ottima la base determinata al punto iv).

Esercizio n.9

Si consideri il seguente problema di Programmazione Lineare:

$$P \qquad \begin{cases} \min(2x_1 + 2x_2 - 12x_3) \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 \geq -1 \\ -x_1 + x_2 - 4x_3 \geq 1 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases} .$$

i) Scrivere il problema in forma standard;
ii) determinare una soluzione di base ammissibile e una non ammissibile;
iii) risolvere il problema P con l'algoritmo del simplesso;
iv) sostituire la funzione obiettivo di P con $2x_1 + 2x_2 + ax_3$; scrivere il duale D del problema così ottenuto e stabilire al variare del parametro reale a quando D ha regione ammissibile non vuota.

Esercizio n.10

Si consideri il seguente problema di Programmazione Lineare:

$$P: \qquad \begin{cases} \min(3x_1 - 2x_2 + 4x_3) \\ 3x_1 - x_2 - x_3 \geq -1 \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 \geq -3 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases} .$$

i) Risolvere il problema P con l'algoritmo del simplesso;
ii) dopo aver sostituito il primo vincolo del problema P con $3x_1 - x_2 - x_3 \geq b$, determinare i valori di b per i quali la soluzione trovata al punto i) rimane ottima;
iii) scrivere il duale D del problema P e rappresentarlo graficamente;
iv) determinare tutte le soluzioni di base *ammissibili* del problema D, specificando se sono degeneri o no, ed una soluzione di base *non ammissibile*;
v) risolvere il problema D.