ALGEBRA LINEARE CON ELEMENTI DI GEOMETRIA

modulo : ELEMENTI DI GEOMETRIA (Prof. M. Spera)

Prova scritta del 18 settembre 2012

① Nel piano euclideo reale, in cui sia fissato un riferimento cartesiano, ampliato proiettivamente, si determini la parabola $\mathcal{P}$ tangente alla retta $r : x = 0$ in $R : (0,1)$, passante per $A : [0,1,1]$ e con fuoco su $a : y = x$.
Se ne determini l'asse, il vertice, il fuoco e la direttrice, e se ne abbozzi altresì il grafico.

② Nello spazio euclideo reale, in cui sia fissato un riferimento cartesiano, assegnata la retta
$$r : \begin{cases} x + y + z - 1 = 0 \\ x - 2y = 0 \end{cases}$$
si trovi il piano π del fascio $\mathcal{F}$ di asse
$$r' : \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = t \end{cases}$$
parallelo a r. Quindi si trovi la distanza tra π e r.

Tempo a disposizione: 1h 15m

Le risposte vanno adeguatamente giustificate

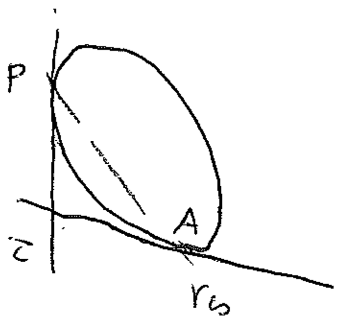
Elegro
18 Settembre
2012

(1) $\mathcal{P}$: parabola tangente
a $\tau: x=0$ in $P:(0,1)$,
passante per $A:[0,1,1]$ e con fuoco su
$a: y=x$

Sol.

$A \in r_\infty \Rightarrow \mathcal{P}$ deve essere ivi tangente a r_∞

$\Rightarrow A:[0,1,1]$ rappresenta la direzione dei diametri. L'informazione su F ci dice che $a: y=x$ è l'asse della parabola. Si giunge al fascio di coniche bitangenti:



forma affine

$$\lambda\, \tau \cdot r_\infty + r^2 = 0$$

$r = PA$ $\quad y-1=x$

$$\boxed{r:\ x-y+1=0}$$

$$\lambda x + (x-y+1)^2 = 0$$

$$\mathcal{P}_\lambda \quad x^2-2xy+y^2+(2+\lambda)x-2y+1=0$$

Troviamo λ in modo che l'asse, polare di $A^\perp:[0,1,-1]$, sia $y=x$ (poichè F si trova lì)

$$(x_0\ x_1\ x_2)\begin{pmatrix}1 & \frac{2+\lambda}{2} & -1\\ \frac{2+\lambda}{2} & 1 & -1\\ -1 & -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}=0$$

$$(x_0 \quad x_1 \quad x_2)\begin{pmatrix} \overbrace{\frac{2+\lambda}{2}+1}^{\frac{4+\lambda}{2}} \\ \underbrace{1+1}_{2} \\ \underbrace{-1-1}_{-2} \end{pmatrix} = 0$$

$$\frac{4+\lambda}{2}x_0 + 2x_1 - 2x_2 = 0$$

deve essere $\quad 4+\lambda = 0 \quad \Rightarrow \lambda = -4$

$$\boxed{\mathcal{P}: \quad x^2 - 2xy + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0}$$

vertice: $\quad \mathcal{P} \cap a \qquad \begin{cases} (x-y)^2 - 2x - 2y + 1 = 0 \\ y = x \end{cases}$

$-2x - 2x + 1 = 0 \qquad -4x + 1 = 0 \qquad x = \frac{1}{4}$

$\Rightarrow y = \frac{1}{4}$

$$\boxed{V: \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)}$$

$$p = \sqrt{-\frac{\alpha}{\gamma^3}}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

(Sarrus)

$\alpha = 1 - 1 - 1 - 1 - 1 - 1$

$= -4$

$\gamma = 2$

$$p = \sqrt{\frac{4}{8}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\boxed{p = \frac{\sqrt{2}}{2}}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$= -2(1+1)$

controllo $\quad \alpha = -4$

Per ragioni geometriche, posto $\underline{u} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$,

si avrà

$$\begin{matrix}F\\ H\end{matrix} = V \pm \frac{p}{2}\,\underline{u} = \begin{pmatrix}\frac{1}{4}\\ \frac{1}{4}\end{pmatrix} \pm \frac{\sqrt{2}}{4}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix}\frac{1}{4} \pm \frac{1}{4}\\ \frac{1}{4} \pm \frac{1}{4}\end{pmatrix} = \begin{cases}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}\end{cases} \qquad \boxed{F: \left(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\right)} \quad \boxed{H: (0,0)}$$

$\delta:\ x + y = 0$

direttrice

controllo: δ polare di F

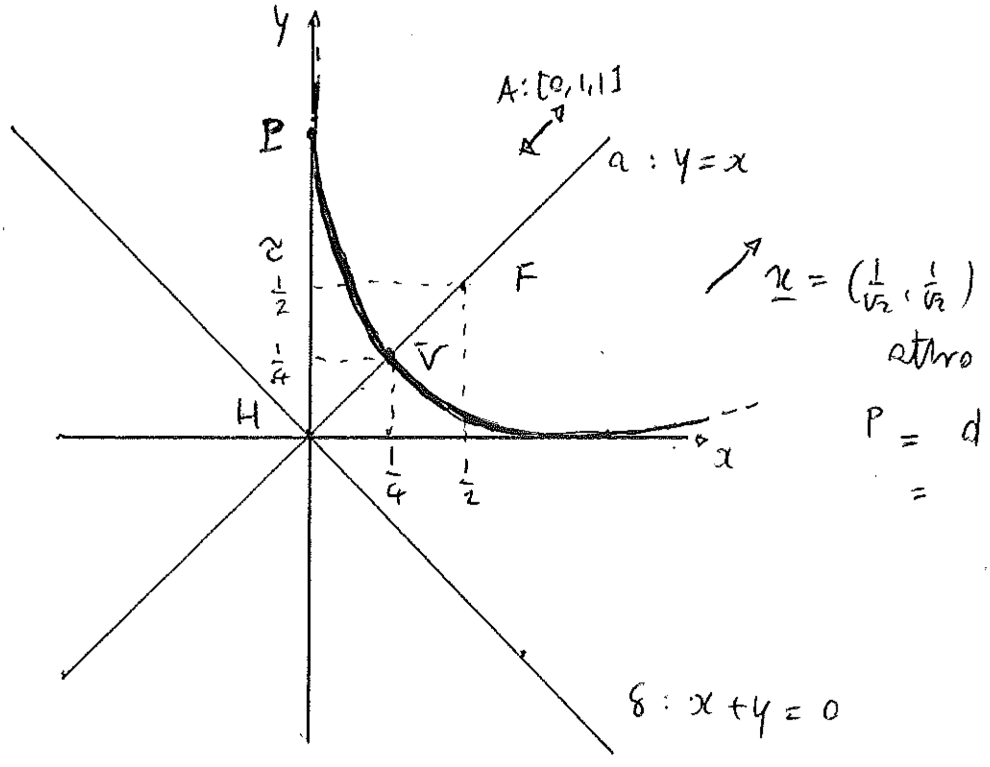
$$(x_0\ x_1\ x_2)\begin{pmatrix}1 & -1 & -1\\ -1 & 1 & -1\\ -1 & -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}\end{pmatrix} = 0$$

$$(x_0\ x_1\ x_2)\begin{pmatrix}\overbrace{1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}}^{0}\\ \overbrace{-1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}}^{-1}\\ \underbrace{-1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}}_{-1}\end{pmatrix} = 0$$

$$-x_1 - x_2 = 0$$

$$x_1 + x_2 = 0 \qquad \boxed{x + y = 0} \quad \checkmark$$

grafico:



altro controllo:

$$p = d(V, F) = \sqrt{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$\checkmark$

ossia

$$2 \cdot \lambda + \mu - \lambda - 3(-\mu) = 0$$

$$2\lambda + \mu - \lambda + 3\mu = 0$$

$$4\mu + \lambda = 0$$

prendiamo per es.

$$\mu = 1 \Rightarrow \lambda = -4$$

il piano è $-4(x-y) + y - z = 0$

$$-4x + 4y + y - z = 0$$

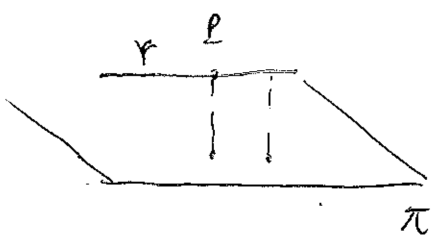
$$-4x + 5y - z = 0$$

$$\pi : \boxed{4x - 5y + z = 0}$$

(controllo $2 \cdot 4 - 5 - 3 = 8 - 8 = 0$ ✓)

basta a questo pto calcolare la distanza di un pto qualsiasi di r da π, ad esempio $P : (0, 0, 1)$ $(\in r)$

$$d = \frac{|4 \cdot 0 - 5 \cdot 0 + 1 \cdot 1|}{\sqrt{16 + 25 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{42}}$$



$$\boxed{d = \frac{1}{\sqrt{42}}}$$