Esercizi e problemi

Problema 1 *Quando un cerchio, restando in un piano, rotola senza strisciare sopra una retta fissa (* base*) con velocità angolare ω, un punto P della circonferenza descrive una curva detta* cicloide*. Indichiamo con b il raggio del cerchio mobile generatore; se la base è l'asse delle x e all'istante $t = 0$ il punto mobile P coincide con l'origine delle coordinate, l'equazione parametrica del raggio vettore $\vec{R} = \vec{OP}$ è:*

$$\vec{R} = b(\omega t \sin \omega t)\vec{\imath} + b(1 - \cos \omega t)\vec{\jmath}.$$

Supponiamo che la velocità angolare ω sia positiva e costante. Dopo aver fatto un disegno appropriato, si risponda alle seguenti domande.

a) Trovare l'ascissa del punto di contatto A del cerchio mobile con la base.

b) Determinare la velocità e l'accelerazione vettoriale.

c) Trovare i valori di t per cui il punto mobile P coincide con il punto di contatto A del cerchio generatore con la base. Trovare le ascisse corrispondenti.
Dimostrare che in tali punti il vettore $\vec{\jmath}$ è tangente alla cicloide.

d) Dimostrare che, se $P \neq A$, il vettore $\vec{PA}$ è normale alla cicloide in P.

e) Trovare la velocità scalare v, il raggio di curvatura ρ, l'accelerazione tangenziale a_τ e l'accelerazione a_ν. Dimostrare che $\bar{AP} = \frac{\rho}{2}$.

f) Determinare il differenziale d'arco ds e la lunghezza dell'arco completo corrispondente a un giro del cerchio generatore.

g) Sia Q il centro di curvatura della cicloide, cioè il centro del cerchio osculatore. Usando i risultati dei punti **d** *ed* **e***, si dimostri che il punto Q è il simmetrico di P rispetto al punto di contatto A.*

h) Trovare le coordinate di Q, cioè le equazioni parametriche dell'evoluta della cicloide (l'evoluta è la traiettoria descritta dal centro di curvatura).

i) Si dimostri che l'evoluta ottenuta è una cicloide abbassata di $2b$ rispetto alla precedente e sfasata di mezzo giro.

Esercizio 1 *Determinare massimo e minimo assoluti di*

$$f(x,y) \;=\; \frac{1}{1 + x^2\, y^2}$$

nell'insieme $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$.
Esistono massimi e minimi assoluti per la funzione f considerata su tutto il suo dominio $\mathbb{R}^2$?

Esercizio 2 *Disegnare la regione piana*

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4, x + y \geq 0\}$$

e trovare le coordinate del baricentro, supposto che essa abbia densità costante 1. (Determinare cioè $\frac{1}{AreaD} \int\int_D x \, dA$ *e* $\frac{1}{AreaD} \int\int_D y \, dA$*).*

Esercizio 3 *Si consideri il campo vettoriale:*

$$\boldsymbol{F} = \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2} \, (x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}).$$

1. Determinare un potenziale per il campo.
2. Trovare il lavoro del campo $\boldsymbol{F}$ *lungo la curva* C *di equazione*

$$\phi(t) = (e^t, \; e^t \sin t, \; t^2)$$

con $0 \leq t \leq 1$.

Esercizio 4 *Si consideri il solido*

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 5, z \geq 1\}.$$

1. Descriverne la frontiera e calcolarne il volume.
2. Servendosi del teorema della divergenza calcolare il flusso del campo

$$\boldsymbol{F} = (x + 2y)\boldsymbol{i} - 3y\boldsymbol{j} + 5z\boldsymbol{k}$$

uscente da ciascuna delle due superficie che delimitano V.

Esercizio 5 *Il solido* V *ed il campo* F *sono quelli dell'Esercizio precedente.*
1. Parametrizzare la curva C *definita dall'insieme*

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 5, z = 1\}$$

in modo che sia percorsa in verso antiorario se vista dall'alto, e trovare il lavoro di $\boldsymbol{F}$ *lungo tale curva.*
2. Calcolare poi il rotore di $\boldsymbol{F}$ *e verificare il risultato ottenuto mediante la formula di Stokes.*