EX 2 fila A   Analisi Matematica II

Verificare che l'equazione $e^{x-y}+x^2-y^2=e(x+1)-1$

definisce implicitamente una funzione $y=y(x)$ in un intorno di $x=0$ con $y(0)=-1$

Disegnare il grafico in un intorno di $x=0$ e dimostrare che $x=0$ è punto di minimo relativo

Ris

Sia $f(x,y)=e^{x-y}+x^2-y^2-e(x+1)+1$

f è definita in $\mathbb{R}^2$, è continua con derivate parziali di qualsiasi ordine continue.

$f(0,-1)=e^{1}+0-1-e+1=0$

$f_y(x,y)=-e^{x-y}-2y \qquad f_y(0,-1)=-e^{1}+2\neq 0$

Sono verificate le ip del teorema di Dini $\Rightarrow$

$\Rightarrow \exists!$ funzione $y=y(x)$ definita implicitamente da $f(x,y)=0$ in un intorno U di 0 t.c. $y(0)=-1$, tale funzione è derivabile (infinite volte) in U.

Derivo rispetto ad x la seguente identità in U:

$e^{x-y(x)}+x^2-(y(x))^2-e(x+1)+1\equiv 0 \quad \Rightarrow$

$e^{x-y}(1-y')+2x-2yy'-e=0$

Sostituisco $x=0$ e $y=y(0)=-1$

$e(1+y'(0))+2y'(0)-e=0 \quad \Rightarrow y'(0)=0$

Derivo ulteriormente

$e^{x-y}(1-y')^2-e^{x-y}y''+2-2(y')^2-2yy''=0$

Sostituisco $x=0$, $y=-1$ e $y'=y'(0)=0 \Rightarrow e-ey''(0)+2+2y''(0)=0$

$\Rightarrow y''(0)=\dfrac{e+2}{e-2}>0$

Essendo $y'(0)=0$ e $y''(0)>0 \Rightarrow$ $x=0$ è punto di minimo locale