TOPOLOGIA E GEOMETRIA DIFFERENZIALE Prof. M. Spera

a.a. 2009/10

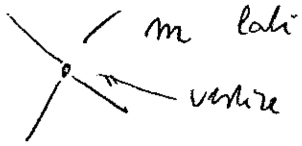
Lezione A8

Solidi platonici
dualità di Poincaré

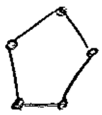
★ Solidi platonici

S $\quad$ V: vertici
$\quad\quad$ E: spigoli
$\quad\quad$ F: facce

Euler: $\quad V - E + F = 2$



N = numero lati di ogni faccia



$$mV = 2E = N \cdot F$$

$$V = \frac{N}{m} F \qquad E = \frac{N}{2} \cdot F$$

$$2m \qquad F\left[1 + \frac{N}{m} - \frac{N}{2}\right] = 2$$

$$F\,(2m + \underbrace{2N - mN}_{(2-m)N}) = 4m$$

$$2N - mN + 2m > 0 \qquad N \geq 3$$

$$2m > mN - 2N = (m-2)N > (m-2)3$$

$$2m > 3m - 6$$

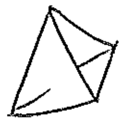
$$\Rightarrow \quad m < 6$$

$m = 1$ non ammissibili

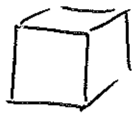
$m = 2$

$m = 3$ $\qquad F(6 - N) = 12$

$$\Rightarrow \begin{cases} N = 3 & F = 4 \\ N = 4 & F = 6 \\ N = 5 & F = 12 \end{cases}$$



tetraedro



cubo

dodecaedro

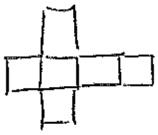
$m = 4$ $\qquad F(8 - 2N) = 16$

$N = 3$ $\qquad 2F = 16 \qquad F = 8$ $\qquad$ ottaedro

$m = 5$ $\qquad F(10 - 3N) = 20$

$N = 3$ $\qquad F = 20$ $\qquad$ icosaedro

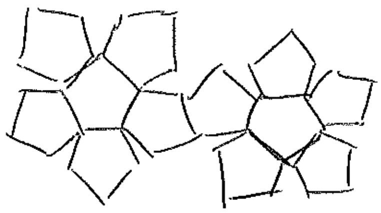
Solidi platonici : costruzione



tetraedro

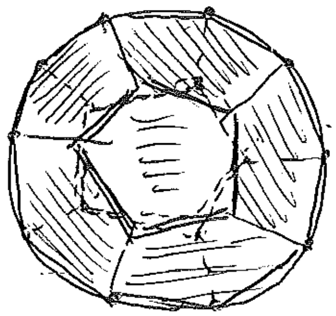
cubo

ottaedro

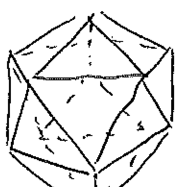


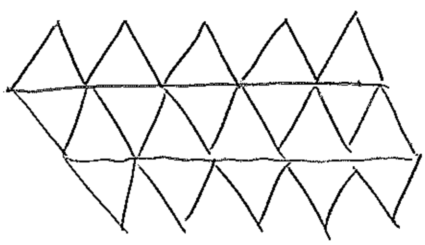
dodecaedro

← Sviluppi



icosaedro





★ Sia K una 2-pseudo varietà con

n_0 vertici (0-simplessi) n_1 1-simplessi n_2 2-simplessi

Si ha: (i) $3n_2 = 2n_1$ $n_2 = \frac{2}{3}n_1$

(ii) $n_1 = 3(n_0 - \chi(K))$

(iii) $n_0 \geq \frac{1}{2}\left(7 + \sqrt{49 - 24\chi(K)}\right)$

Dim.

(i) è ovvia 

(ii) Segue da Euler-Poincaré:

$$n_0 - n_1 + n_2 = \chi(K)$$

$$n_0 - n_1 + \frac{2}{3}n_1 = \chi(K)$$

$$n_0 - \frac{1}{3}n_1 = \chi(K)$$

$$3[n_0 - \chi(K)] = n_1$$

(iii) $n_0 \geq 4$ ()

★ $n_1 \leq \frac{1}{2}n_0(n_0-1)$

$$6n_2 = 4n_1$$

$$2n_1 = 6n_1 - 6n_2$$

$$n_0(n_0-1) \geq 6n_1 - 6n_2$$

$$n_0(n_0-1) - 6n_0 \geq 6n_1 - 6n_2 - 6n_0$$

$$n_0^2 - 7n_0 \geq -6\,\chi(K)$$

$$4n_0^2 - 28n_0 \geq -24\,\chi(K)$$

$$4n_0^2 - 28n_0 + 49 \geq 49 - 24\,\chi(K)$$

!

Notare! $\quad (2n_0 - 7)^2 \geq 49 - 24\,\chi(K) \qquad \forall\, n_0 \geq 4$

[il primo membro è minimo per $x = \frac{7}{2}$ ...]

Se $n_0 = 4$ è $\quad 1 \geq 49 - 24\,\chi(K)$

$$0 \geq 48 - 24\,\chi(K) \implies \boxed{\chi(K) \leq 2}$$

proseguendo:

$(n_0 \geq 4)$
$$2n_0 - 7 \geq \sqrt{49 - 24\,\chi(K)}$$

$$n_0 \geq \frac{7 + \sqrt{49 - 24\,\chi(K)}}{2}$$

□

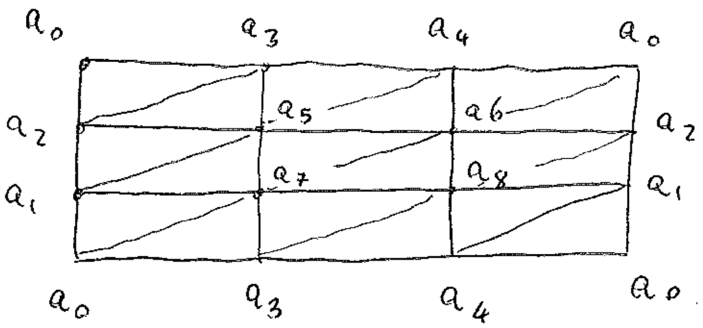
Ex: 2-sfera $\quad n_0 \geq \frac{7+1}{2} = 4$

$\chi = 2 \quad\quad n_1 \geq 3(4-2) = 6$

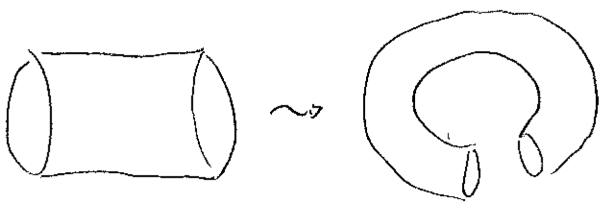
$n_2 \geq \frac{2}{3} \cdot 6 = 4$

Es. * il toro $\qquad \chi = 0$

$$n_0 \geq \frac{1}{2}(7+7) = 7$$



qui $n_0 = 9$



$$n_1 = 3n_0 \geq 21$$

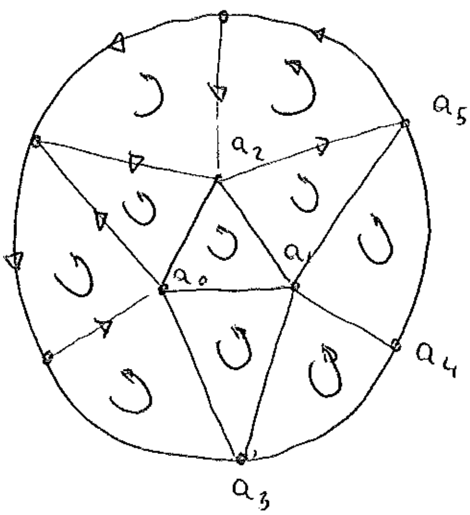
il piano proiettivo $(\chi = 1)$

$$n_0 \geq \frac{1}{2}\left(7 + \sqrt{49-24}\right)$$

$$= \frac{1}{2}(7+5) = 6$$

$$n_1 \geq 3 \cdot (6-1) = 15$$

$$n_2 \geq \frac{2}{3} \cdot 15 = 10$$



Mayer-Vietoris per la coomologia a supporto compatto

Fatto fondamentale

Ω^* : funtore controvariante

$f: M \to N \qquad f \in \mathcal{C}^\infty(M,N)$

$f^*: \Omega^*(N) \to \Omega^*(M)$

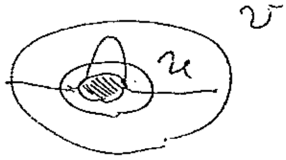
pull-back

permette di def. il grado di una mappa propria

Ω^*_c : lo stesso, ma per le applicazioni proprie!! (f^{-1}(compatto) = compatto)

funtore covariante rispetto all'inclusione di insiemi aperti

$j: U \hookrightarrow V$



$j_*: \Omega^*_c(U) \hookrightarrow \Omega^*_c(V)$

(si estende a zero...)

costruzione   unione disgiunta

$$U \cap V \rightrightarrows U \coprod V \to M$$

$$\Omega_c^*(U \cap V) \xrightarrow{\delta} \underset{\omega_1}{\Omega_c^*(U)} \oplus \underset{\omega_2}{\Omega_c^*(V)} \xrightarrow{\text{somma}} \underset{\omega_1+\omega_2}{\Omega_c^*(M)}$$

$$\omega \mapsto (-j_*\omega, j_*\omega)$$

Si ha la ∄ successione esatta corta di Mayer - Vietoris (a supporti compatti)

$$\boxed{0 \to \Omega_c^*(U \cap V) \to \Omega_c^*(U) \oplus \Omega_c^*(V) \to \Omega_c^*(M) \to 0}$$

Dim: è semplicissima ...

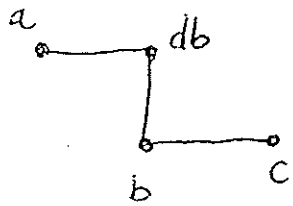
si noti che in questo caso

∄ $\rho_U \omega$ è una forma in U

mentre nella prec. successione era una forma in V!

Si ottiene ("by abstract nonsense")

la successione esatta lunga in coomologia:



$$\cdots \to H^{q+1}_c(\mathcal{U}\cap V) \to H^q_c(U)\oplus H^q_c(V) \to H^q_c(M) \xrightarrow{d_*} \cdots$$

$d\rho_U w$ su U
$\cancel{-d\rho_V w}$ su V $\longleftarrow$ $d\rho_U w \oplus d\rho_V w$

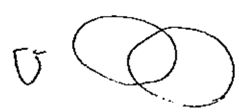
$$\xrightarrow{d_*} H^q_c(\mathcal{U}\cap V) \to H^q_c(U)\oplus H^q_c(V) \to H^q_c(M) \xrightarrow{d_*} \cdots$$

$\rho_{\mathcal{U}} w \oplus \rho_V w \longleftarrow w$

Ex: calcoliamo $H^*_c(S^1)$ $(= H^*(S^1)\,!)$

	$U\cap V$		$U \amalg V$		S^1
0	0		0	$\to$	?
1	$\mathbb{R}\oplus\mathbb{R}$ (a, b)	$\xrightarrow{\delta}$	$\mathbb{R}\oplus\mathbb{R}$ $b-a$	$\to$	?
2	0		0		

$$\delta : \quad \omega = (\omega_1, \omega_2) \longmapsto (-(j_U)_* \omega, (j_V)_* \omega)$$



$\dim \operatorname{Im} \delta = \dim \ker \delta = 1$

$$\boxed{\begin{aligned} H^0_c(S^1) &= \ker \delta = 1 \\ H^1_c(S^1) &= \operatorname{coker} \delta = 1 \end{aligned}}$$

Osservazione importante (*)

dalla regola di Leibniz per le forme

si ha

$$\left[\; H^*(M) \text{ è un } \underline{\underline{\text{algebra}}} \quad (\text{commutativa in senso graduato}) \;\right]$$

(l'op. di prodotto è indotta da $\wedge$)

$$(w_1 + da_1) \wedge (w_2 + da_2) =$$

$dw_i = 0$

$$= w_1 \wedge w_2 + \underbrace{da_1 \wedge w_2 + w_1 \wedge da_2 + da_1 \wedge da_2}_{=: \, dF}$$

$d(w_1 \wedge w_2) =: 0$

perché ?

(*) v. anche Preludio

[★ Nota : è ben possibile avere $H^*(M) \cong H^*(N)$ come sp. vettoriali ma non come algebre ! ($\Rightarrow M \not\cong_{diff} N$, ovviamente) vedremo ...]

Dualità di Poincaré

Se M è orientabile, $\exists$ accoppiamento
(senza bordo) pairing

$$H^q(M) \times H_c^{n-q}(M) \to \mathbb{R}$$

$$\left[\int : H^q(M) \otimes \underset{\text{coomologia a supporto compatto}}{H_c^{n-q}(M)} \to \mathbb{R} \right]$$

indotto da $\boxed{\int \omega \wedge \tau}$

in particolare se M è compatta e orient. si ha $H^q(M) \cong H^{n-q}(M)$

(è ben definito : • d è un'antiderivazione
verificare! • Stokes ← M è orientabile

Teorema: Se M è orientabile e ha un buon ricoprimento finito, il pairing $\int$ è duale:

$\left(\langle , \rangle \; V \otimes_{\mathbb{R}} W \to \mathbb{R} \right.$ $\begin{cases} \langle v, w \rangle = 0 \;\; \forall w \Rightarrow v = 0 \\ \langle v, w \rangle = 0 \;\; \forall v \Rightarrow w = 0 \end{cases}$

$\left. \Rightarrow \boxed{V \cong W^*} \right)$

ovvero: $$\boxed{H^q(M) \cong \left[H_c^{n-q}(M) \right]^*}$$

Ha validità più generale: vedi oltre

(si ha anche $V^* \cong W$)

[verifica che $\int$ passa in coomologia :

$$d\omega = 0 \quad d\tau = 0$$

$$\boxed{\int_M (\omega + da) \wedge (\tau + db) =}$$

supp. compatto

$$= \int_M \omega \wedge \tau + \int_M da \wedge \tau + \int_M \omega \wedge db + \int_M da \wedge db$$

$$= \int_M \omega \wedge \tau \pm \underbrace{\int_M d(a \wedge \tau)}_{\int_{\partial M} a \wedge \tau = 0} \pm \int_M a \wedge \underbrace{d\tau}_{0}$$

$$\pm \underbrace{\int_M d(\omega \wedge db)}_{0} \pm \int_M \underbrace{d\omega}_{0} \wedge b$$

$$\pm \underbrace{\int_M d(a \wedge db)}_{0} = \int_M \omega \wedge \tau \;]$$

* Commento: Bisogna dimostrare che

$$(*)\quad \int_M \omega \wedge \tau = 0 \qquad \forall\, \tau,\ d\tau = 0$$

$d\omega = 0$

$\Rightarrow \quad \omega = d\alpha$

e viceversa.

* Ciò non è semplice, malgrado le apparenze:

$$\int_M \omega \wedge \tau = 0 \quad \forall\, \tau \quad \Rightarrow \quad \omega = 0$$

> Si riesce a dimostrare facilmente che
>
> $(*) \Rightarrow d\omega = 0$ (se vale $(*)$
>
> (senza !)

Otterremo un'altra dimostrazione di ciò tramite la* teoria di Hodge, (* per varietà compatte senza bordo), che richiede l'introd. di una

* metrica riemanniana.

Vedremo ora

$$\boxed{\text{Mayer-Vietoris} + \text{lemma dei cinque}}$$

Dim. Le due successioni di Mayer-Vietoris possono essere "accoppiate", e formano un diagramma commutativo "a meno di segni"

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & H^q(\bar U \cup \bar V) \arrow[r, "\text{restrizione}"] & H^q(\bar U) \oplus H^q(\bar V) \arrow[r, "\text{differenza}"] & H^q(\bar U \cap \bar V) \arrow[r, "d^*"] & H^{q+1}(\bar U \cup \bar V) \\
& \otimes & \otimes & & \\
& H_c^{n-q}(\bar U \cup \bar V) \arrow[d, "\int_{\bar U \cup \bar V}"'] & H_c^{n-q}(\bar U) \oplus H_c^{n-q}(\bar V) \arrow[l, "\text{somma}"'] \arrow[d, "\int_{\bar U} + \int_{\bar V}"] & H_c^{n-q}(\bar U \cap \bar V) \arrow[l, "\text{inclusione ``segnata''}"'] \arrow[d, "\int_{\bar U \cap \bar V}"] & \arrow[l, "d_*"'] \\
& \mathbb{R} & \mathbb{R} & \mathbb{R} &
\end{tikzcd}$$

ovvero..

$$\int_{\bar U \cap \bar V} \omega \wedge d_* \tau = \pm \int_{\bar U \cap \bar V} d^* \omega \wedge \tau$$

etc..

i primi due "quadrati" risultano commutativi (ovvio)
Vediamo l'ultimo

$$\left[\, d^* w = \begin{cases} -d(\rho_V w) & \text{su } U \\ d(\rho_U w) & \text{su } V \end{cases}\right.$$

$$(\in H^{q+1}(U \cup V))$$

$$\left[\, d_* \tau \mapsto (\underbrace{d\rho_U \tau}_{= d\rho_U \tau}, \underbrace{d(\rho_V \tau)}_{= d\rho_V \tau}) \right. \quad (\text{perché?})$$

$$\boxed{\int_{U\cap V} \omega \wedge d_* \tau} = \int_{U \cap V} \omega \wedge d\rho_V \tau$$

$$= \underbrace{(-1)^{\deg w} \int_{U\cap V} d\rho_V \omega \wedge \tau}$$

$$\| \quad \pm$$

D'altro canto:

$$\int_{U \cup V} \underset{\text{ha supporto in}}{d^* w} \wedge \tau = - \overbrace{\int_{U \cap V} d\rho_V w \wedge \tau}.$$

Se la <u>dualità di Poincaré</u> vale per U, V, $U \cap V$, vale per $U \cup V$ (<u>lemma[*] dei cinque</u>)

[*] vale certamente per $\mathbb{R}^n$ (<u>lemmi di Poincaré</u>)

$\Rightarrow$ (induzione) vale per M con un buon ric. finito $\square$

(Si richiede

$$\begin{tikzcd}
\to H^q \arrow[r] \arrow[d] & H^q \oplus H^q \arrow[r] \arrow[d] & H^q \to \arrow[d] \\
\to (H_c^{n-q})^* \arrow[r] & (H_c^{n-q})^* \oplus (H_c^{n-q})^* \arrow[r] & (H_c^{n-q})^* \to
\end{tikzcd}$$

commutativo a meno di segni

$$\begin{tikzcd}
\bigcirc \arrow[r] \arrow[d, "\text{iso}"] & \bigcirc \arrow[r] \arrow[d, "\text{iso}"] & H^q(U \cup V) \arrow[r] \arrow[d, "\text{iso}"] & \bigcirc \arrow[r] \arrow[d, "\text{iso}"'] & \bigcirc \arrow[d, "\text{iso}"'] \\
\bigcirc \arrow[r] & \bigcirc \arrow[r] & H_c^{n-q}(U \cup V) \arrow[r] & \bigcirc \arrow[r] & \bigcirc
\end{tikzcd}$$

"lemma dei 5"

Si può fare a meno dell'ipotesi del buon ricoprimento (c.v. Greub, Halperin, Vanstone, o De Marco). Si ha

$$\boxed{H^q(M) \simeq \left[H_c^{n-q}(M)\right]^* \qquad \forall q}$$

L'enunciato è asimmetrico!

Infatti, se $M = \coprod_{i=1}^{\infty} M_i$ (unione disgiunta) con M_i conn. f. dim.

$$H^q(M) = \prod_i H^q(M_i) \qquad \text{(prodotto diretto)}$$

$$H_c^q(M) = \bigoplus_i H_c^q(M_i) \qquad \text{Somma diretta}$$

(coinvolge somme finite!)

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Ora } \left(\bigoplus_i V_i\right)^* = \prod_i V_i^* \\ \text{ma } \left(\prod_i V_i\right)^* \neq \bigoplus_i V_i^* \ ! \end{array}}$$

(altrimenti si avrebbe .. $V \cong V^{**}$, il che è falso in dim. infinita!)

biduale algebrico

Nel nostro caso vale (♦) se Poincaré vale per M_i.

Conseguenze

1. M orientata, connessa, $\dim M = n$, $\partial M = \phi$

$$\Rightarrow \boxed{H^n_c(M) = \mathbb{R}} \quad (\Rightarrow \text{ se } M \text{ è } \underline{\text{compatta}}, \ \boxed{H^n(M) = \mathbb{R}}$$

Infatti $H^0(M) = \mathbb{R} = H^n_c(M)^*$ □

2. M come sopra, non compatta

$$\Rightarrow \boxed{H^n(M) = 0}$$

Dim. $H^n(M) \cong H^0_c(M)^* = \ldots = 0$
perché?

Il "lemma dei cinque"

$$\begin{tikzcd}
\arrow[r] & A \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "\alpha"'] & B \arrow[r, "f_2"] \arrow[d, "\beta"'] & C \arrow[r, "f_3"] \arrow[d, "\gamma"'] & D \arrow[r, "f_4"] \arrow[d, "\delta"'] & E \arrow[r] \arrow[d, "\varepsilon"'] & \dots \\
\arrow[r] & A' \arrow[r, "f_1'"'] & B' \arrow[r, "f_2'"'] & C' \arrow[r, "f_3'"'] & D' \arrow[r, "f_4'"'] & E' \arrow[r] & \dots
\end{tikzcd}$$

- Siano $A, A' \dots$ gruppi abeliani, $\alpha, \dots f, f'$ omomorfismi
- Il diagramma è commutativo e a righe esatte
- $\alpha, \beta, \delta, \varepsilon$ isomorfismi

Allora γ è un isomorfismo

Dim ① γ è iniettivo

Sia $\gamma(c) = 0$ $(c \in C)$

Allora $\delta f_3(c) = f_3'(\gamma(c)) = 0$

$\Rightarrow$ $\boxed{f_3(c) = 0}$

$\Rightarrow$ $c \in \operatorname{Im} f_2$: $\exists\, b \in B$ con

$\boxed{c = f_2(b)}$

e $\gamma \underbrace{f_2(b)}_{c} = 0$ $\Rightarrow$ $\boxed{f_2' \beta(b) = 0}$

$(\beta(b) \in \operatorname{Ker} f_2')$. ma $\operatorname{Ker} f_2' = \operatorname{Im} f_1'$

$\Rightarrow \exists\, a' \in A'$ t.c.

$$\boxed{f_1'(a') = \beta(b)}$$

e $a' = \alpha(a)$ per un unico a

Perciò

$$f_1'(\alpha(a)) = \beta(b)$$

$$\Rightarrow \beta(f_1(a)) = \beta(b)$$

$$\Rightarrow \boxed{b = f_1(a)}$$

$$\text{e } \boxed{c = f_2(b) = f_2(f_1(a)) = 0}$$

$\square$

(2) δ è suriettivo

Sia $c' \in C'$

$f_3'(c') \in \operatorname{Ker} f_4'$: $f_4'(f_3'(c')) = 0$

$\Rightarrow \varepsilon^{-1}[f_4'(f_3'(c'))] = 0$

$$\Rightarrow \boxed{f_4[\delta^{-1} f_3'(c')] = 0}$$

$$\Rightarrow \quad \delta^{-1} f_3'(c') = f_3(c) \quad \text{per qualche } c \in C$$

$$\Rightarrow \quad f_3'(c') = \delta f_3(c) = f_3' \gamma(c)$$

Dunque $\forall\, c' \; \exists\, c$ tale che

$$\boxed{f_3'(c' - \gamma(c)) = 0}$$

Successivamente abbiamo

$$c' - \gamma(c) = f_2'(b') \quad \text{per qualche } b'$$

$$\|$$

$$\gamma f_2(\beta^{-1} b')$$

$$\Rightarrow \quad c' = \gamma(\underbrace{c + f_2(\beta^{-1}(b'))}_{= c})$$

$$\Rightarrow \quad c' = \gamma(c) \qquad \square$$