TUTORAGGIO ANALISI II

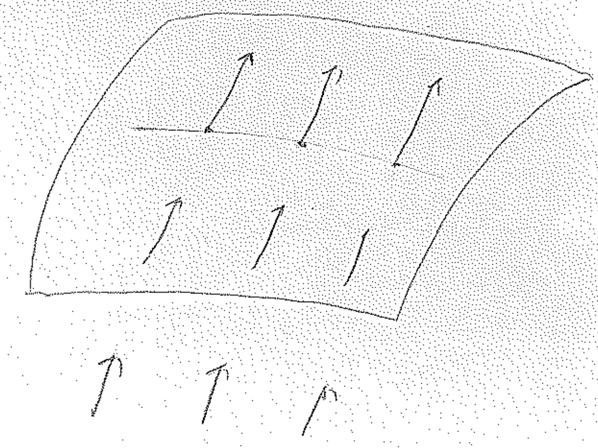
a.a. 2012/2013

dott.ssa Sconcella

LEZIONE DEL 22/1/2013

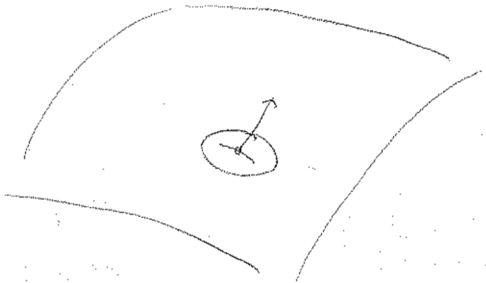
FLUSSO ATTRAVERSO UNA SUPERFICIE.

Supponiamo di avere una superficie e un campo vettoriale che attraversa la superficie.



Noi vorremmo calcolare il numero di particelle che attraversano la superficie in un intervallo di tempo unitario. In altre parole noi vogliamo calcolare il FLUSSO del campo attraverso la superficie.

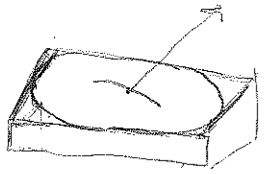
Per far ciò consideriamo una piccola porzione di superficie



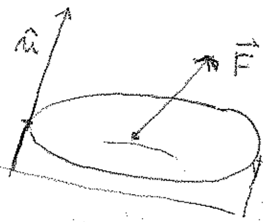
e osserviamo che nell'intervallo di tempo dato solo le particelle che saranno a stretto contatto con la superficie la potranno attraversare. Le altre particelle saranno troppo distanti.

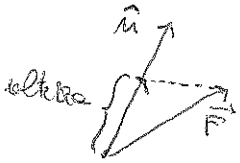
Osserviamo inoltre che le particelle seguiranno la stessa direzione del campo vettoriale che in generale non coincide con la normale alla superficie.

Per quantificare il numero di particelle consideriamo un piccolo parallelepipedo in prossimità della nostra porzione di superficie.



Il volume del nostro parallelepipedo ci darà una misura della quantità di particelle che attraverseranno la superficie.
Il volume è dato dall'area della base per l'altezza. Nel nostro caso abbiamo che l'area di base è rappresentata dalla porzione di superficie che chiameremo $d\sigma$, mentre per trovare l'altezza si deve considerare la proiezione del flusso sulla normale alla superficie.





altezza $= \vec{F} \cdot \hat{n}$

Infine per avere la quantità di particelle che attraversano tutta la superficie si devono sommare tutti i contributi delle porzioni di superficie.
Quindi abbiamo che il flusso è dato dal seguente integrale

$$\iint_{\Sigma} \vec{F} \cdot \hat{n} \, d\sigma$$

Abbiamo pertanto la seguente

<u>DEFINIZIONE</u>

Dato un campo vettoriale continuo $F: A \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ e una superficie Σ, il <u>flusso</u> di F attraverso Σ è dato da

$$\Phi_{\Sigma} = \iint_{\Sigma} \vec{F} \cdot \vec{n} \, d\sigma .$$

Per calcolare l'elemento d'area $d\sigma$, una volta introdotta una parametrizzazione $r(u,v)$ della superficie Σ si ha che

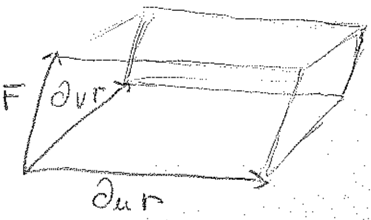
$$d\sigma := |\partial_u r \wedge \partial_v r| \, du \, dv$$

Mentre l'espressione che ci dà la normale alla superficie è

$$\hat{n} = \frac{\partial_u r \wedge \partial_v r}{|\partial_u r \wedge \partial_v r|}$$

ULTERIORE INTERPRETAZIONE

Ricordando che il determinante di una matrice ci fornisce il volume del solido generato dai tre vettori che costituiscono la matrice



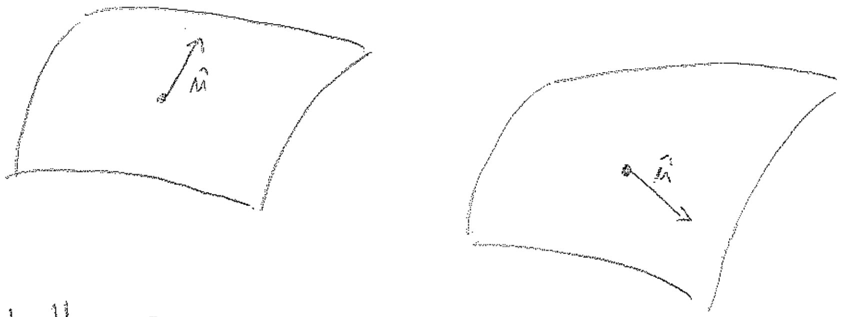
Si ha che il flusso del campo F attraverso la superficie Σ può essere calcolato anche mediante il seguente integrale

$$\iint_{\Sigma = U \times V} \det \begin{pmatrix} F_1 & F_2 & F_3 \\ \partial_u r_1 & \partial_u r_2 & \partial_u r_3 \\ \partial_v r_1 & \partial_v r_2 & \partial_v r_3 \end{pmatrix} du \, dv$$

SUPERFICI ORIENTATE

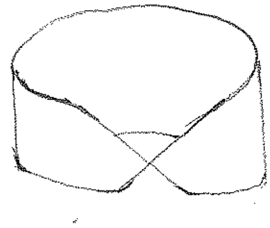
Quando consideriamo il flusso attraverso una superficie abbiamo due facce, una attraverso cui il flusso entra, l'altra attraverso cui il flusso esce. La presenza di queste due facce ci porta a parlare di orientamento di una superficie. Quindi quando si parla di flusso attraverso la superficie è molto importante considerare l'orientamento della superficie poiché a seconda di esso si può avere un flusso positivo o negativo.

È il versore normale alla superficie che ci dà l'ORIENTAZIONE della superficie stessa. Scegliere un verso del versore normale significa scegliere un orientamento sulla superficie.



Le due possibili orientazioni di una superficie.

Però non tutte le superfici sono orientabili. Un esempio classico è il NASTRO di MOEBIUS.



Si tratta di una superficie ottenuta considerando una striscia di carta. Tenendo fisso un estremo, si fa compiere mezzo giro all'altro estremo e poi si vanno a congiungere i due estremi per formare un anello. Abbiamo pertanto la seguente

DEFINIZIONE (Superficie orientabile)

Sia Σ una superficie. Essa è orientabile se per ogni curva continua chiusa che giace sulla superficie, parametrizzata da $r: [a,b] \to \Sigma$, si ha che

$$\hat{n}(r(b)) = \hat{n}(r(a)).$$

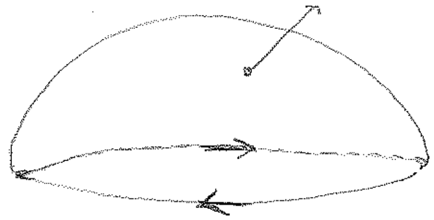
Cioè il valore del versore nel punto di arrivo della curva deve coincidere con il valore del versore nel punto di inizio. Praticamente il versore normale varia con continuità sulla superficie.

Su una superficie orientabile è possibile pertanto distinguere due facce e fissare un orientamento significa scegliere un verso di attraversamento della superficie.

ESEMPI: superfici cartesiane (sempre verso esterno), sfera (interno/esterno).

BORDO DI UNA SUPERFICIE ED ORIENTAMENTO

Anche il bordo di una superficie ha un suo orientamento



Per quanto riguarda questo argomento, che è molto delicato, quello che a noi interessa sapere è il seguente fatto:

- l'orientamento della superficie induce in modo naturale un orientamento sul bordo il base alla regola della mano destra (orientamento positivo).
- esistono superfici senza bordo, come la sfera o il toro. Queste si dicono CHIUSE.

ESEMPIO 1.

Dato il campo vettoriale $V(x,y,z)=(2x, zy, x^2+y^2)$ definito su $\mathbb{R}^3$. Determinare il flusso di V attraverso la superficie laterale S, del cono, di equazione $f(x,y)=4-\sqrt{x^2+y^2}$.

Consideriamo una parametrizzazione della superficie, $r: A\subseteq\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ dove

$$r(\rho,\vartheta)=(\rho\cos\vartheta, \rho\sin\vartheta, 4-\rho) \qquad \rho\in(0,4) \text{ e } \vartheta\in(0,2\pi)$$

Allora il flusso di V uscente dalla superficie S è dato da

$$\Phi_S=\iint_A V(r(\rho,\vartheta))\cdot(\partial_\rho r\wedge\partial_\vartheta r)\,d\rho\, d\vartheta$$

Calcoliamo pertanto

$$\partial_\rho r(\rho,\vartheta)=(\cos\vartheta, \sin\vartheta, -1)$$

$$\partial_\vartheta r(\rho,\vartheta)=(-\rho\sin\vartheta, \rho\cos\vartheta, 0)$$

$$\partial_\rho r \wedge \partial_\vartheta r = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \cos\vartheta & \sin\vartheta & -1 \\ -\rho\sin\vartheta & \rho\cos\vartheta & 0 \end{vmatrix} = (\rho\cos\vartheta, \rho\sin\vartheta, \rho)$$

il vettore trovato è uscente in quanto la terza componente è positiva.
Quindi

$$\Phi_S = \int_0^4 \int_0^{2\pi} ((4-\rho)\cdot\rho\cos\vartheta, (4-\rho)\rho\sin\vartheta, \rho^2)\cdot(\rho\cos\vartheta, \rho\sin\vartheta, \rho)\, d\vartheta\, d\rho$$

$$= \int_0^4 \int_0^{2\pi} ((4-\rho)\,\rho^2\cos^2\vartheta + (4-\rho)\cdot\rho^2\sin^2\vartheta + \rho^2\cdot\rho)\, d\vartheta\, d\rho$$

$$= \int_0^4 \int_0^{2\pi} \left[(4-\rho)\rho^2 + \rho^3\right] d\vartheta\, d\rho$$

$$= \int_0^4 (4-\rho)\rho^2 \cdot \vartheta\Big|_0^{2\pi} d\rho + \int_0^4 \rho^3\cdot\vartheta\Big|_0^{2\pi} d\rho$$

$$= 2\pi\int_0^4 (4\rho^2 - \rho^3)\, d\rho + 2\pi\cdot\frac{\rho^4}{4}\Big|_0^4$$

$$= 2\pi\left[4\cdot\frac{\rho^3}{3} - \frac{\rho^4}{4}\right]_0^4 + 2\pi\cdot 4^3$$

$$= 2\pi\cdot\frac{4^3}{3} + 2\pi\cdot 4^3 = \frac{2\pi}{3}\cdot 4^4$$

TEOREMA DI STOKES

Sia Σ una superficie regolare orientata con versore normale n, dotata di bordo $\partial^+\Sigma$ orientato positivamente. Supponiamo inoltre che $\partial^+\Sigma$ sia una curva regolare e sia T il versore tangente a $\partial^+\Sigma$. Se $F = P\underline{i} + Q\underline{j} + R\underline{k}$ è un campo vettoriale regolare definito in un intorno di Σ, allora vale

$$\iint_\Sigma \operatorname{rot} F \cdot \hat{n}\, dS = \oint_{\partial^+\Sigma} F \cdot T\, ds$$

Il precedente teorema si può riassumere dicendo:
il flusso del rotore di F attraverso Σ con l'orientamento indotto dalla parametrizzazione è dato dalla circuitazione di F lungo il bordo di Σ orientato positivamente.

OSSERVAZIONE IMPORTANTE

Nel caso in cui Σ sia una superficie piana, il Teorema di Stokes si riduce a quello di Gauss-Green.

ESEMPIO:

TEOREMA DELLA DIVERGENZA

Sia $D \subseteq \mathbb{R}^3$ un dominio limitato, semplice, la cui frontiera è una superficie regolare e orientabile. Indichiamo con $\hat{n}_e$ il versore normale esterno a ∂D e sia $F = F_1 \underline{i} + F_2 \underline{j} + F_3 \underline{k}$ un campo vettoriale di classe $C^1(D)$. Allora vale la formula $\quad \operatorname{div} F = \nabla \cdot F = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}$

$$\iiint_D \operatorname{div} F(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iint_{\partial D} F \cdot \hat{n}_e \, dS$$

↑ flusso del campo F uscente dalla frontiera ∂D

Il teorema precedente si può riassumere dicendo:
il flusso di F attraverso una superficie chiusa, orientata con normale uscente, è pari all'integrale fatto sul volume racchiuso dalla superficie stessa.

NOTA IMPORTANTE:
La normale che compare nel teorema della divergenza è la normale uscente da Ω. Tale orientamento potrebbe non concordare con quello assegnato dal problema. Sarà necessario verificare se i due orientamenti coincidono e in caso contrario, mutare segno al risultato.