

Calcolo Numerico per Informatica – Simulazione 1 – 10/05/2016

Tempo: 120 minuti

COGNOME	NOME

Esercizio 1 (6 punti) Si consideri il problema di valutare per $x \in [0, 1]$ la funzione

$$f(x) = \sqrt{1+x} - 1$$

- (a) Valutare il numero di condizionamento (**0.5 punti**) e dire se il problema è ben o mal condizionato (**0.5 punti**).

Consideriamo, ora, il sistema dei numeri di macchina $\mathbb{F}(10, 2, -2, 2)$.

- (b) Calcolare quanti elementi ha $\mathbb{F}(10, 2, -2, 2)$ (**0,5 punti**) e scrivere la precisione di macchina (**0.5 punti**).
- (c) Assumendo che in $\mathbb{F}(10, 2, -2, 2)$ la radice quadrata di u sia valutato come $\text{fl}(\sqrt{u})$, calcolare, in $\mathbb{F}(10, 2, -2, 2)$, $\hat{y} = f(0.10)$ (**1.5 punti**). Trovare il valore assoluto dell'errore relativo $|(y - \hat{y})/y|$ con $y = f(x)$ valore esatto (**0.5 punti**).
- (d) Dire se la formula che esprime f è stabile per il problema in questione (**0.5 punti**) ed in caso negativo proporre una stabile ripetendo il calcolo di $\hat{y}$ e del relativo errore (**1.5 punti**).

Esercizio 2 (9 punti) Si consideri il metodo di Newton per approssimare la radice $\xi = 0$ della funzione

$$f(x) = x^2 \cdot \ln(1+x)$$

Siano x_k ed $e_k = \xi - x_k$, $k \in \mathbb{N}$ l'iterata e l'errore associati al passo k -esimo del metodo con $x_0 = 2$.

- (a) Abbozzare il grafico di f per x vicine a ξ (**0.5 punti**) ed usarlo per illustrare graficamente il metodo di Newton (**1.0 punti**) e, con riferimento al punto di partenza x_0 dato, dire quale tipo di monotonia ci si aspetta dalla successione di iterate x_k generate da Newton (**0.5 punti**).
- (b) Determinare la molteplicità della radice ξ (**0.5 punti**). Dire qual è l'ordine di convergenza del metodo di Newton (**0.5 punti**), la costante asintotica dell'errore (**0.5 punti**) e fornire un grafico qualitativo dell'errore $\log_{10}(|e_k|)$ (**0.5 punti**). Usare la costante asintotica dell'errore per fornire una ragionevole previsione sul numero k di iterazioni richieste dal metodo per avere $|e_k| < 10^{-9} \cdot |e_0|$ (**1.0 punti**).
- (c) Calcolare le iterate x_1 , x_2 ed x_3 del metodo di Newton (**1.5 punti**) ed utilizzarle per stimare la costante asintotica dell'errore (**0.5 punti**).
- (d) Proporre un metodo che converga più velocemente di Newton alla radice ξ (**0.5 punti**), disegnare il grafico qualitativo dell'errore $\log_{10}(|e_k|)$ (**0.5 punti**). Sapendo che le iterate generate dal metodo sono $x_1 = -3.016495e-01$, $x_2 = -1.912475e-02$ fornire una stima dell'errore della iterata x_3 (**1.0 punti**).

Esercizio 3 (6 punti) Della funzione f si conoscono i valori $y_i = f(x_i)$ nei punti indicati nella seguente tabella

i	0	1	2	3
x_i	-1	0	1	2
y_i	4	3	1	0.5

- (a) **[2.5+0.5+0.5 punti]** Calcolare il polinomio di interpolazione di Newton verificando che passa per i punti indicati. Usare il polinomio trovato per stimare $f(0.5)$.
- (b) **[2.5 punti]** Supponendo per f il modello $f(x) = K \cdot e^{\alpha x}$, calcolare i parametri K ed α secondo i minimi quadrati.

Esercizio 4 (6 punti) Si consideri il calcolo dell'integrale

$$I = \int_0^1 (x^4 + x) dx$$

- (a) **[1 punto]** Calcolare il valore esatto dell'integrale.
- (b) **[2 punti]** Determinare il numero di intervalli richiesti dal metodo dei trapezi composto per calcolare l'integrale con un errore non superiore a 10^{-6} .
- (c) **[0.5+0.5+0.5 punti]** Usando il metodo dei trapezi composto, calcolare due stime dell'integrale $I_T^{(1)}$ e $I_T^{(2)}$ con $m = 1$ e con $m = 2$ intervalli. Calcolare i corrispondenti errori ed il loro rapporto.
- (d) **[0.5+1 punto]** Usare $I_T^{(1)}$ e $I_T^{(2)}$ per ottenere una stima $\hat{I}$ piu' accurata dell'integrale I . Dire se $\hat{I}$ da' o meno il valore esatto I spiegandone i motivi.

Esercizio 5 (3,0 punti) Scrivere una function Matlab per il metodo di Newton. Corredare la function con commenti esplicativi. La function restituisce in uscita tutte le iterate a partire dal punto x_0 . Scrivere inoltre uno script di prova che disegna anche in scala semilogaritmica il valore assoluto dell'errore.

Tutte le risposte devono essere giustificate alla luce della teoria svolta. Risposte corrette ma non adeguatamente giustificate non sono ritenute valide.