TUTORAGGIO ANALISI II

a.a. 2012/2013

dott.ssa Saoncella

LEZIONE DEL 23/11/2012

CURVE DI LIVELLO

Def: Il GRAFICO della funzione $f: D \to \mathbb{R}$, dove $D \subset \mathbb{R}^2$, è definito come

$$\text{Grafico}(f) = \{(x, y, f(x,y)) : (x,y) \in D\}$$

NOTA: Il grafico di una funzione di due variabili è una superficie nello spazio.

Def: Le CURVE DI LIVELLO della funzione $f: D \to \mathbb{R}$, dove $D \subset \mathbb{R}^2$ si definiscono come

$$E_K = \{(x,y) \in D : f(x,y) = K\}$$

NOTA: Le curve di livello sono curve che vengono rappresentate nel piano xy.

Le curve di livello rappresentano i punti del dominio in corrispondenza dei quali la funzione assume lo stesso valore.

In generale, fissata la quota K, le curve di livello si ottengono intersecando il grafico della funzione f con il piano $z=K$ parallelo al piano xy e andando a proiettare i punti di intersezione sul piano xy.
Quando sezioniamo il grafico della funzione con il piano $z=K$ si ottiene una linea che unisce tutti i punti alla stessa quota.

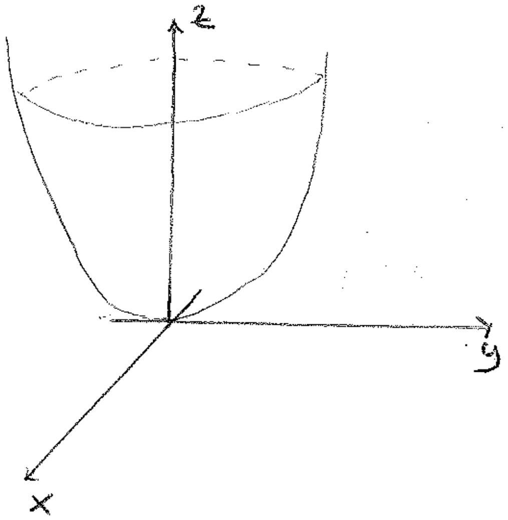
NOTA: Le curve di livello possono anche essere le intersezioni con i piani $x=K$ o $y=K$ paralleli ai piani coordinati.

Esempio 1

Consideriamo il paraboloide con vertice nell'origine di equazione

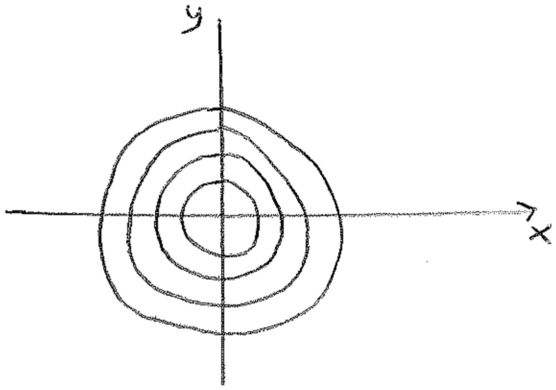
$$f(x,y) = x^2+y^2$$

e studiamone le curve di livello.



Le curve di livello sono le curve di equazione $f(x,y)=k$.
Vediamo cosa succede al variare di k.

- Se $k<0$,
  l'equazione $x^2+y^2=k$ ha come soluzioni $\emptyset$. Questo ci dice che se andiamo ad intersecare il grafico di f con un piano avente quota negativa, non troviamo nessun punto di intersezione.
- Se $k=0$,
  l'equazione $x^2+y^2=0$ ha come soluzione il punto $(0,0)$.
  Quindi l'intersezione del piano $z=0$ con il grafico di f è il punto $(0,0,0)$.
- Se $k>0$,
  l'equazione $x^2+y^2=k$ rappresenta l'equazione delle circonferenze di centro l'origine $(0,0)$ e raggio $\sqrt{k}$.
  Quindi andando ad intersecare i piani $z=k$ con il grafico di f ed andando a proiettare sul piano xy si trovano tutte circonferenze concentriche.



ESEMPIO 2

Si consideri la funzione $f(x,y)=(x-y)^2$ e si disegnino le curve di livello.

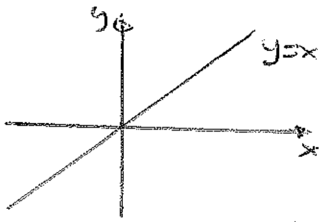
L'equazione delle curve di livello è data da $f(x,y)=k$.

- Se $k<0$,

  abbiamo $(x-y)^2=c$ e l'insieme delle soluzioni è $\emptyset$ (non esistono valori di x ed y che verificano l'equazione).

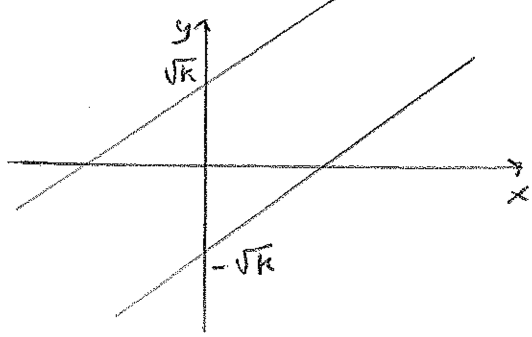
- Se $k=0$,

  da $(x-y)^2=0$ si ottiene $x-y=0$ e quindi $y=x$.
  Questo significa che la curva di livello è la retta di equazione $y=x$.



- Se $k>0$,

  da $(x-y)^2=k$ si ricava che $x-y=\pm\sqrt{k}$ e quindi abbiamo $x-y=\sqrt{k}$ e $x-y=-\sqrt{k}$. Le curve di livello sono le due rette di equazione $y=x+\sqrt{k}$ e $y=x-\sqrt{k}$ per k fissato.



Esempio 3

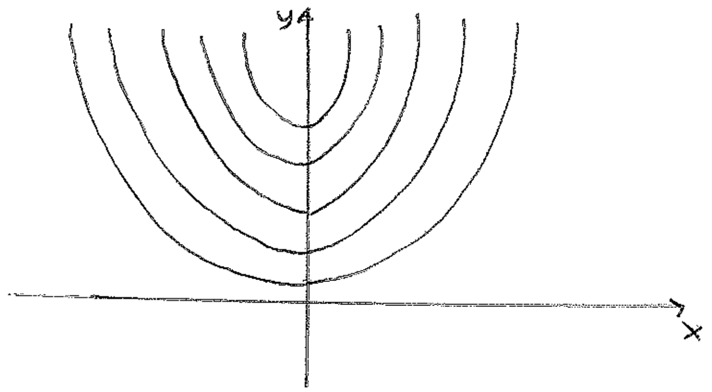
Si consideri la funzione $f(x,y) = x^2 - 2y$ e si disegnino le curve di livello.

L'equazione delle curve di livello è $f(x,y) = k$.

- Se $k < 0$,

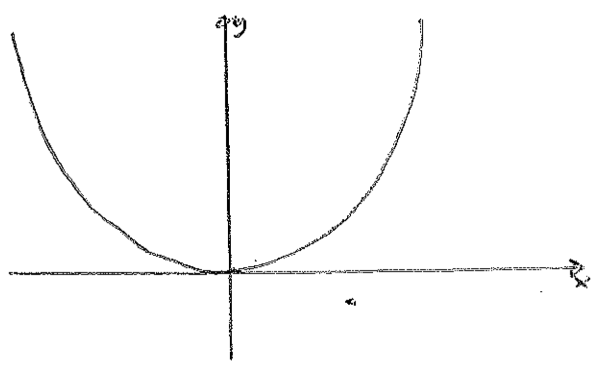
  abbiamo $x^2 - 2y = k$ da cui si ricava che $y = \frac{x^2}{2} - \frac{k}{2} > 0$.

  Le curve di livello sono parabole di vertice $V(0, -\frac{k}{2})$ e con concavità rivolta verso l'alto. Si osservi che le parabole non intersecano l'asse x ($y > 0$).



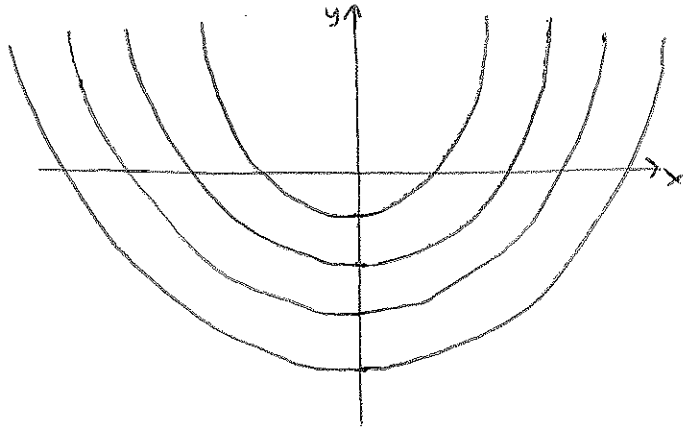
- Se $k = 0$,

  da $x^2 - 2y = 0$ si ha che $y = \frac{1}{2} x^2$. Quindi la curva di livello sarà data dalla parabola con vertice nell'origine e concavità rivolta verso l'alto.



- Se $k > 0$

  da $x^2 - 2y = k$ si ha che $y = \frac{1}{2} x^2 - \frac{k}{2}$. Quindi le curve di livello saranno parabole con vertice $V(0, -\frac{k}{2})$ e rivolte verso l'alto. Le intersezione con gli assi sono $(\pm\sqrt{k}, 0)$.



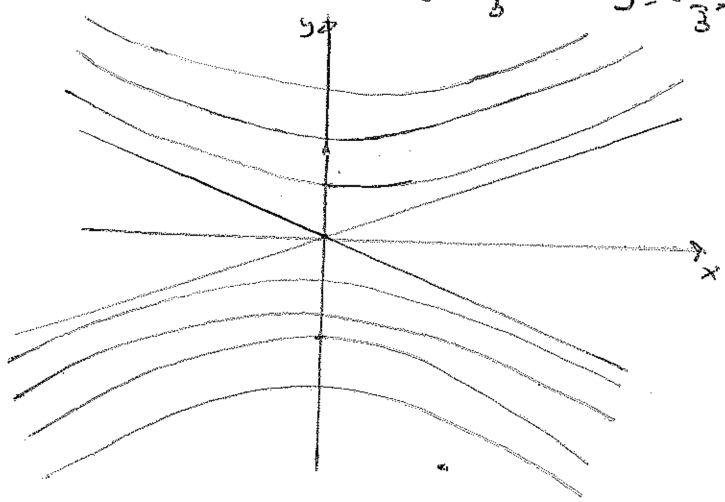
ESEMPIO 4

Si consideri la funzione $f(x,y) = 2x^2 - 3y^2$ e si disegnino le curve di livello.

L'equazione delle curve di livello è $f(x,y) = k$.

- Se $k < 0$,

  abbiamo $2x^2 - 3y^2 = k$ che rappresenta l'equazione di un iperbole che interseca l'asse y in $-\sqrt{-k/3}$ e $\sqrt{-k/3}$ per k fissato.
  Ora dividendo l'equazione per $2x^2$ e facendo tendere x all'infinito affinché l'equazione valga devo avere che $\frac{y^2}{x^2} \to \frac{2}{3}$. Si ricava pertanto che gli asintoti sono $y = \frac{2}{3}x$ e $y = -\frac{2}{3}x$.

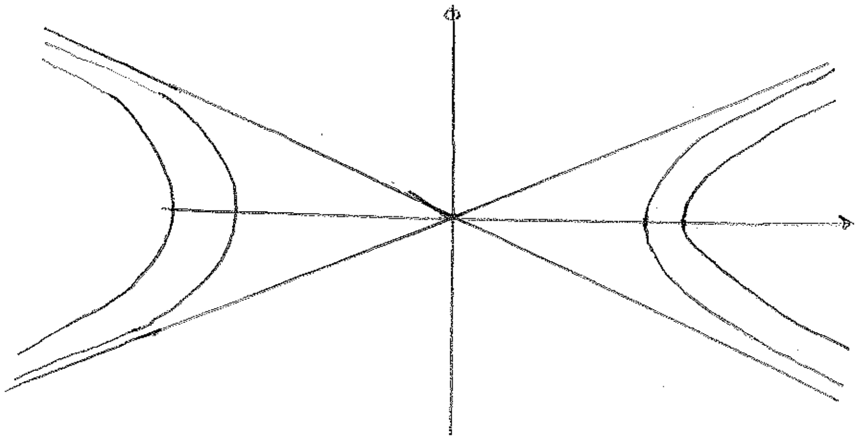


- Se $k = 0$,

  abbiamo $2x^2 - 3y^2 = 0$, da cui si ricava che $y = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}x$
  Quindi la curva di livello è dato dalle rette $y = -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}x$ e $y = +\sqrt{\frac{2}{3}}x$.

Se $k>0$,

si ha che in questo caso $2x^2-3y^2=k$ rappresenta l'equazione di un iperbole che interseca l'asse x in $-\sqrt{k/2}$ e $\sqrt{k/2}$ per k fissato.



ESEMPIO 5

Si consideri la funzione $f(x,y)=xe^{-xy}$ e si disegni la curva di livello per $k=1$.

La curva di livello è data dall'equazione $f(x,y)=1$.

Quindi abbiamo $xe^{-xy}=1$ da cui ricaviamo che $x>0$.

Riscriviamo l'equazione come

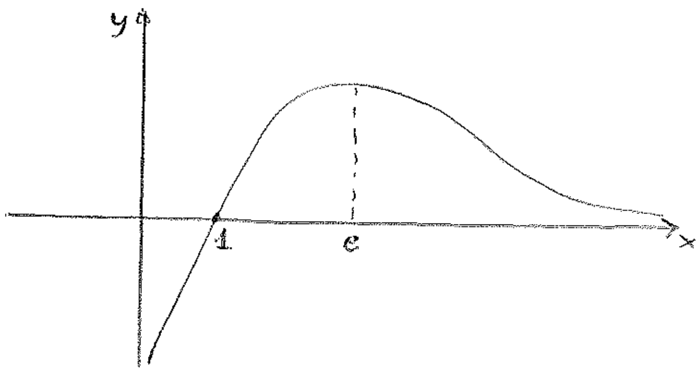
$$e^{-xy}=\frac{1}{x}$$

e quindi passando ai logaritmi abbiamo

$$-xy=\log x^{-1} \quad \Rightarrow \quad y=\frac{\log x}{x}$$

Facendo un piccolo studio di funzione si ha che la funzione y è definita per tutti gli $x>0$ e che interseca l'asse x in $x=1$.

La derivata prima $y'=\frac{1-\log x}{x}$ si annulla per $x=e$. Il $\lim_{x\to 0^+} y=-\infty$ e $\lim_{x\to+\infty} y=0$. Quindi la nostra curva di livello è



Esempio 6

Si consideri la funzione $f(x,y)=e^{-x^2-y^2+5x}$ e si trovi la curva di livello per $K=1$.

La curva di livello è data dall'equazione $f(x,y)=1$.
Quindi abbiamo

$$e^{-x^2-y^2+5x}=1$$

applicando i logaritmi si ha che

$$-x^2-y^2+5x=0 \quad \Rightarrow \left(x^2-5x+\frac{25}{4}\right)-\frac{25}{4}+y^2=0$$

quindi si ottiene

$$\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+y^2=\frac{25}{4}$$

che rappresenta l'equazione di una circonferenza di centro $C\left(\frac{5}{2},0\right)$ e raggio $5/2$.

Quindi la curva di livello è