Prof. Lidia Angeleri
Università di Verona, 2008/2009
Corso di Laurea in Matematica Applicata

# Prova scritta per il Corso di Algebra

31 marzo 2009

1. Si enunci il Teorema Fondamentale dell'Omomorfismo. (*3 punti*)

2. Dato un polinomio non costante $f \in K[x]$ su un campo $K$, si definisca quando l'equazione $f(x) = 0$ è risolubile per radicali. (*3 punti*)

3. Si decida se sono veri o falsi i seguenti enunciati.
   (a) Il polinomio $x^4 - 9x^3 + 3x^2 + x + 1$ è irriducibile su $\mathbb{Q}$.
   (b) $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}[X]/(X^2 + 1)$ è un campo.
   (c) Se $f \in \mathbb{Q}[x]$ è un polinomio irriducibile di grado 3 che possiede almeno uno zero in $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, allora $\mathrm{Gal}(f/\mathbb{Q})$ è isomorfo al gruppo simmetrico $S_3$.

   (*6 punti*)

4. Siano $K = \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ e $f = x^2 + 2\,x + 2 \in K[x]$. Si determini il campo di Galois $GF(p^n)$ isomorfo al campo $K[x]/(f)$. (*6 punti*)

5. Dato un dominio $R$, si dimostri: se $I$ è un ideale di $R[X]$ tale che $(X) \subsetneq I \subsetneq R[X]$, allora $I$ non è ciclico. (*6 punti*)

6. Si dimostri che $F = \mathbb{Q}(i, \sqrt[4]{3})$ è un campo di riducibilità completa di $X^4 - 3$ su $\mathbb{Q}$ e si calcoli $[F : \mathbb{Q}]$. Si decida se $\mathrm{Gal}(F/\mathbb{Q})$ è un gruppo abeliano. (*6 punti*)