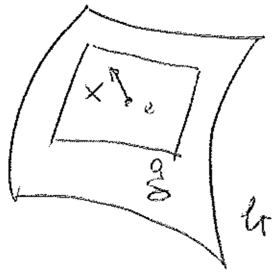
★ Ancora sull'interpretazione di $[X,Y]$ ERRATUM – nuova pagina

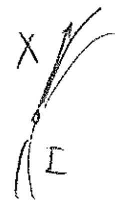
$$G = Gl_+(n,\mathbb{R}) \qquad e = I$$

$$\mathfrak{g} = gl(n,\mathbb{R}) = M_{n\times n}(\mathbb{R}) \ni X \qquad [\,,\,] = \text{commutatore}$$

$$g_X = I + tX + o(t) \qquad g_X = g_X(t)$$

curva in G con velocità $\dot g_X(0) = X$





(campo vettoriale fondamentale)

$$X^\#\big|_A = A\cdot X = A\cdot X^\#\big|_I \qquad A \in Gl_+(n,\mathbb{R})$$

campo vett. invariante a sinistra

in particolare $g_X = e^{tX} = 1 + tX + \frac{t^2}{2}X^2 \ldots$

s. gruppo ad un parametro generato da X

$$\dot g = g\cdot X$$

$$g^{-1}\dot g = X$$

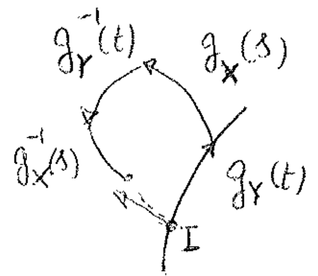
$g^{-1}dg \equiv$ forma di Maurer Cartan: † inv. a sinistra h cost

$$(hg)^{-1}d(hg) = g^{-1}h^{-1}h\,dg = g^{-1}dg$$

calcoliamo

molt. $\equiv$ azione sinistra di G su se stesso

$$g_X^{-1}\cdot g_Y^{-1}\cdot g_X\cdot g_Y$$



$$= (g_Y\cdot g_X)^{-1}\,g_X\cdot g_Y$$

$$g_X\cdot g_Y = (I + sX + \ldots)(I + tY + \ldots) = I + sX + tY + stXY + \ldots$$

$$g_Y\cdot g_X = I + \underbrace{sX + tY + st\,YX + }_{\xi}$$

$$(g_Y\cdot g_X)^{-1} = I - sX - tY - \cancel{st\,YX} + stXY + \cancel{st\,YX} + \ldots$$

t, s piccoli

$$= I - sX - tY + stXY + \ldots$$

(serie geometrica $(1+\xi)^{-1} = 1 - \xi + \xi^2 + \ldots$)

NUOVA PAGINA: calcolo più dettagliato

$$(g_Y \cdot g_X)^{-1}(g_X \cdot g_Y) = (I - sX - tY + stXY + \dots)(I + sX + tY + stXY + \dots)$$

$$= I + stXY + st\cancel{XY} - st\cancel{XY} - stYX + \dots$$

$$= I + st[X,Y] + \dots$$

Pertanto

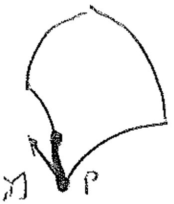
$$\frac{\partial^2}{\partial s\,\partial t}\left(\quad\right)\Big|_{\substack{s=0\\t=0}} = \underbrace{[X,Y]}_{\text{commutatore}},$$

$$= [X,Y]_{\text{Lie bracket}}$$

$[X,Y]_{Lie}$ misura la non commutatività dei due flussi, a livello infinitesimale

[si può anche porre $s \rightsquigarrow \sqrt{s}$, $t \rightsquigarrow \sqrt{s}$ $\quad s>0$

e alla fine $\quad \dots \quad I + s[X,Y] + \dots$



$$\underset{[\,,\,]\ \text{commutatore}}{\mathfrak{g}} \cong \underset{[\,,\,]\ \text{Lie bracket}}{Lie(G)} \quad \text{come algebre di Lie}$$

lavorando in coordinate come prima, si conclude facilmente.

$$X \rightsquigarrow \xi^i \partial_i$$
$$Y \rightsquigarrow \eta^j \partial_j$$