Esercizitazione di Analisi Matematica I

Stefano Zambon

27 Ottobre 2008

- Trovare estremo superiore ed inferiore, specificando se si tratta anche di massimo e minimo, dei seguenti insiemi:

  1. $A = \{x \in \mathbb{R} : |x-2| \leq 1\}$
  2. $A = \left\{x \in \mathbb{R} : x^3 + 2x^2 + 4x + 3 \leq 0\right\}$
  3. $A = \left\{x \in \mathbb{R} : \sqrt{|x-1|} \leq 5\right\}$
  4. $A = \left\{x \in \mathbb{R} : \left(\frac{1}{2}\right)^{x^2+1} > \frac{1}{4}\right\}$
  5. $A = \left\{x \in \mathbb{R} : \log(2x^2 - x) < 0\right\}$

- Trovare estremo superiore ed inferiore, specificando se si tratta anche di massimo e minimo, dei seguenti insiemi:

  1. $A = \left\{\frac{x^2+1}{x} : x \in \mathbb{R},\ x > 0\right\}$
  2. $A = \left\{\frac{x^2+3}{x^2+9} : x \in \mathbb{R}\right\}$
  3. $A = \left\{\frac{xy}{x+y}, \quad x, y \in (0,1)\right\}$
  4. $A = \left\{\frac{(Perimetro(R))^2}{Area(R)}, R \text{ rettangolo non degenere del piano}\right\}$
  5. $\star$ $A = \{xy + 2xz + 3yz, \quad x, y, z \in \mathbb{R},\ x, y, z \geq 0,\ xyz = 48\}$

$\star$ Dimostrare che tra tutti i triangoli di un dato perimetro, il triangolo equilatero è quello avente area maggiore.

$\star$ La ditta che sta svolgendo i lavori di ristrutturazione di Ca' Vignal 2 deve trasportare un tubo in acciaio attraverso un corridoio largo b metri. Che lunghezza massima può avere il tubo, considerato che ad un certo punto del corridoio è presente una svolta a novanta gradi?

- Trovare estremo superiore ed inferiore, specificando se si tratta anche di massimo e minimo, dei seguenti insiemi discreti:

  1. $A = \left\{\frac{n+1}{n}, \quad n \in \mathbb{N},\ n \neq 0\right\}$
  2. $A = \left\{\frac{n^2-1}{n^2+1}, \quad n \in \mathbb{N},\ n \neq 0\right\}$
  3. $A = \left\{\frac{|5-n|}{n+3}, \quad n \in \mathbb{N}\right\}$
  4. $A = \left\{\frac{(-1)^n}{1+n^2}, \quad n \in \mathbb{N}\right\}$
  5. $\star$ $A = \left\{\frac{n^2+m^2}{n+m}, \quad n, m \in \mathbb{N},\ n, m \neq 0\right\}$
  6. $\star$ $A = \left\{\cos^2\left((2n+1)\frac{\pi}{8}\right), \quad n \in \mathbb{N}\right\}$

- Il suono di una nota di pianoforte è costituito da una una successione di *frequenze parziali*, determinate dalla relazione $f_n = n f_0 \sqrt{1 + Bn^2}$, dove f_0 è detta *frequenza fondamentale* e B è il *coefficiente di inarmonicità*. Ad esempio, per un DO della seconda ottava, $f_0 = 65.4$Hz e $B \simeq 1 \times 10^{-4}$. In una simulazione numerica, non si possono rappresentare frequenze parziali più alte di $F_s/2$, dove F_s è la frequenza di campionamento (ad es. $F_s = 44100$Hz nel caso di qualità CD).

  Fissati i parametri f_0, B e F_s, qual è l'indice della più alta frequenza parziale rappresentabile?

$\star$ Siano $A, B \subset \mathbb{R}$, $A, B \neq \emptyset$. Dimostrare che:

1. $\sup(A \cup B) = \max(\sup A, \sup B)$
2. $\inf(A \cup B) = \inf(\inf A, \inf B)$.

$\star$ Siano $A, B \subset \mathbb{R}$, $A, B \neq \emptyset$, $A \subset B$. Dimostrare che

$$\inf B \leq \inf A \leq \sup A \leq \sup B.$$

$\star$ Siano $A, B \subset \mathbb{R}$, $A, B \neq \emptyset$. Definiamo gli insiemi $A + B$, γA nel seguente modo:

1. $A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}$
2. $\gamma A = \{\gamma a : a \in A\}, \gamma \in \mathbb{R}, \gamma \geq 0$.

Dimostrare le seguenti proprietà:

1. $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$
2. $\sup(\gamma A) = \gamma \sup A$.

($\star$): Addendum per matematici applicati.