Frequency Domain Processing

C. Andrés Méndez

March 26th 2013

Sommario

- Ripasso sull'analisi di Fourier e il trattamento numerico dei segnali

- Transformata di Fourier in MatLab

Segnali e Spettri

Fourier Transform

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$$

Inverse Fourier Transform

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

Getting to know the FFT

- **What is the FFT?** *FFT = Fast Fourier Transform*. The FFT is a faster version of the *Discrete Fourier Transform (DFT).* The FFT utilizes some clever algorithms to do the same thing as the DTF, but in much less time.

- **Ok, but what is the DFT?** The DFT is extremely important in the area of frequency (spectrum) analysis because it takes a discrete signal in the time domain and transforms that signal into its discrete frequency domain representation. Without a discrete-time to discrete-frequency transform we would not be able to compute the Fourier transform with a microprocessor or DSP based system.

Getting to know the FFT (2)

- For example, if a sequence has **N** points, and **N** is an integral power of **2**,
  - then DFT requires $\mathbf{N^2}$ operations,
  - whereas FFT requires $\frac{N}{2}\log_2(N)$ complex multiplication,
  - $\frac{N}{2}\log_2(N)$ complex additions and
  - $\frac{N}{2}\log_2(N)$ subtractions.
  - For **N = 1024**, the computational reduction from DFT to FFT is <u>more than 200 to 1</u>.

Discrete Fourier Transform

- DFT

$$G[k]=\sum_{n=0}^{N-1} g[n]\exp(-j2\pi nk/N) \quad k=0,1,\ldots,\text{N-1}$$

If we define the weighting function W_N as

$$W_N = e^{\frac{-j2\pi}{N}} = e^{-j2\pi FT}$$

$G[k]$ can be re-expressed as

$$G[k]=\sum_{n=0}^{N-1} g[n]W_N^{kn}$$

Discrete Fourier Transform, Example

- Given the sequence **x[n]=(1,2,1)**
- Calculate the DFT

$$G[k] = \sum_{n=0}^{N-1} g[n] W_N^{kn}$$

$$W_N = e^{\frac{-j2\pi}{N}} = e^{-j2\pi FT}$$

$$W_3^0 = 1$$

$$W_3^1 = e^{-\frac{j2\pi}{3}} = -0.5 - j0.866$$

$$W_3^2 = e^{-\frac{j4\pi}{3}} = -0.5 + j0.866$$

$$W_3^3 = W_3^0 = 1$$

$$W_3^4 = W_3^1$$

Discrete Fourier Transform, Example (2)

$$G[k] = \sum_{n=0}^{N-1} g[n] W_N^{kn}$$

$$W_N = e^{\frac{-j2\pi}{N}} = e^{-j2\pi FT}$$

$$G[0] = \sum_{n=0}^{2} g[n] W_3^0 = 1 + 2 + 1 = 4$$

$$G[1] = \sum_{n=0}^{2} g[n] W_3^n = g[0]W_3^0 + g[1]W_3^1 + g[2]W_3^2$$

$$= 1 + 2(-0.5 - j0.866) + (-0.5 + j0.866) = -0.5 - j0.866$$

$$G[2] = \sum_{n=0}^{2} g[n] W_3^{2n} = g[0]W_3^0 + g[1]W_3^2 + g[2]W_3^4$$

$$= 1 + 2(-0.5 + j0.866) + (-0.5 - j0.866) = -0.5 + j0.866$$

Discrete Fourier Transform, Example (3)

- In Matlab

- x = [1 2 1];
- xfft = fft(x)

- **Result**:
- xfft =
- 4.0000
- -0.5000 - 0.8660i
- -0.5000 + 0.8660i

Trasformata di Fourier 1-D

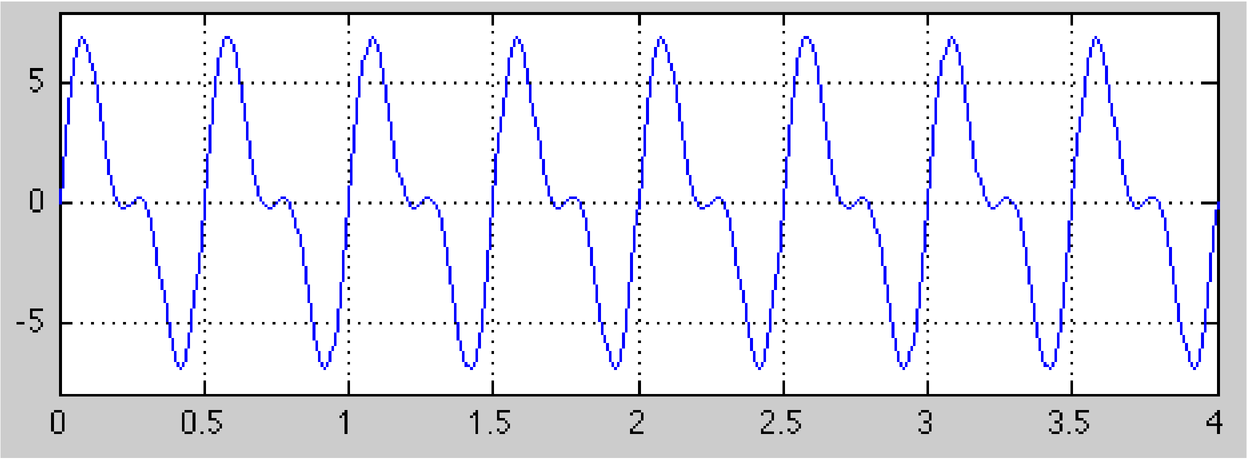
- Ogni segnale può essere descritto dalla somma di sinusoidi con differenti ampiezze e frequenze.

- I comandi MatLab per calcolare la trasformata di Fourier e la sua inversa sono rispettivamente **fft** e **ifft**.

- Esercizio**1**
  - Supponiamo di avere 10 campioni di un segnale casuale (**rand**)
  - Calcolare la FFT del segnale
  - Calcolare la IFFT del segnale
  - Estrarre al parte reale della IFFT
  - Confrontare il risultato della IFFT con il segnale di partenza

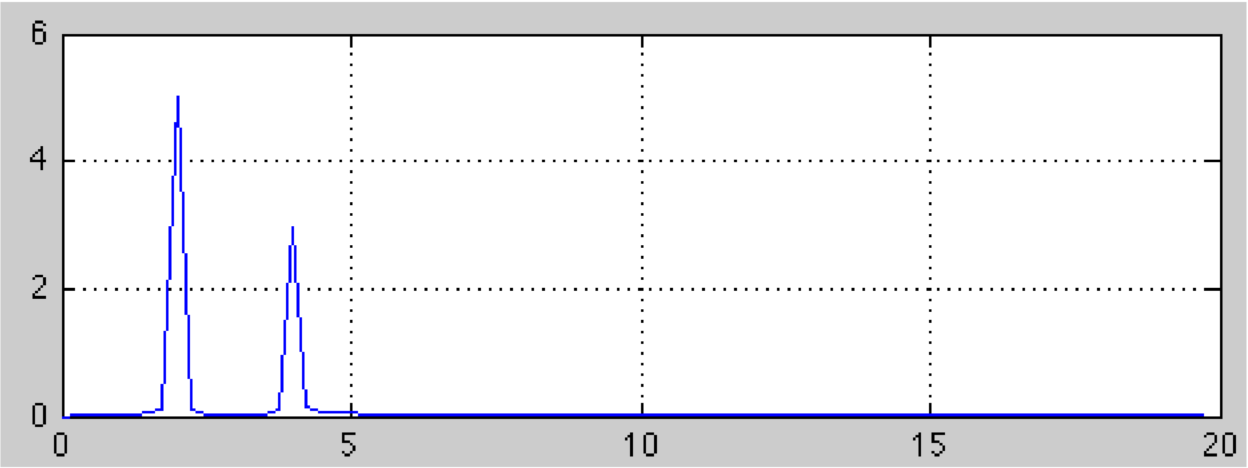
Forma d'onda e spettro di ampiezza

- Esercizio **2**
  - Supponiamo di campionare un segnale ogni 0.01 secondi per la durata di 4 secondi
  - Il segnale è dato dalla somma di due **sinusoidi** di ampiezza *A* 3 e 5 e frequenza *f* 4 e 2 ($\omega=2\pi f$) rispettivamente
  - Generare il grafico tempo – ampiezza (usare il comando axis per aggiustare la scalatura degli assi)

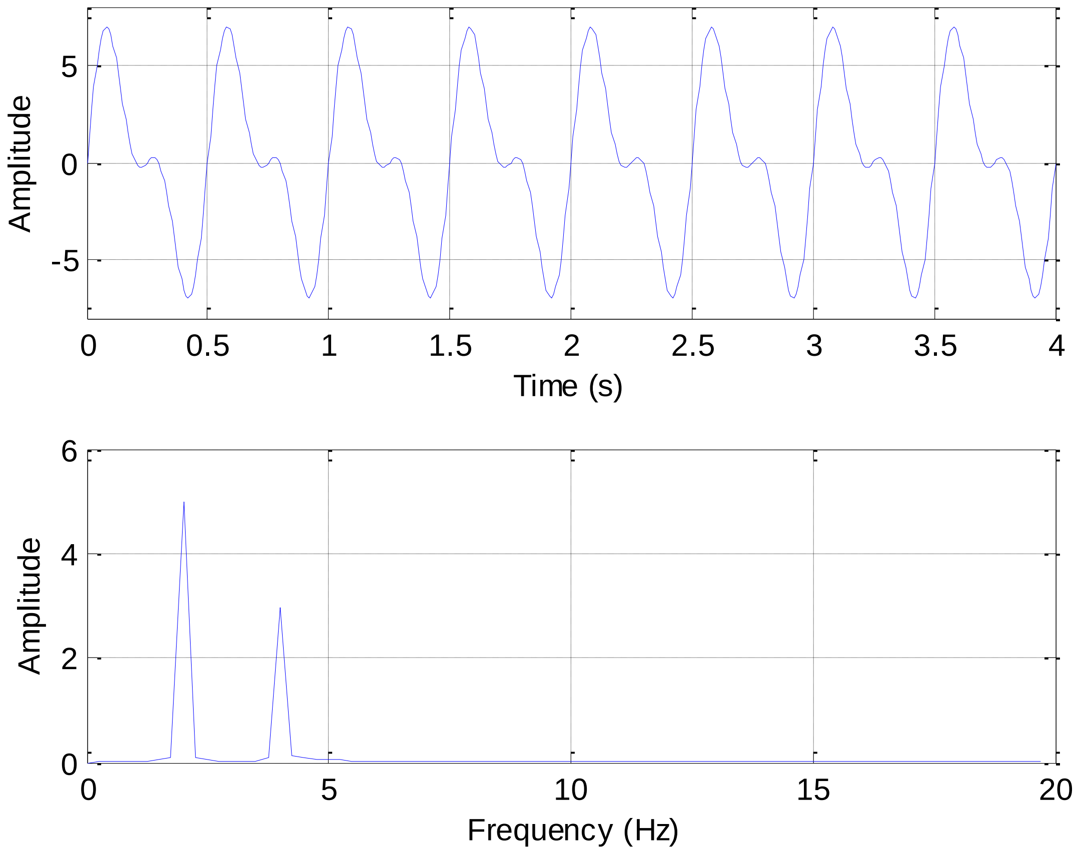


Forma d'onda e spettro di ampiezza (2)

- Con la Trasformata di Fourier possiamo visualizzare cosa caratterizza maggiormente il segnale.
  - Calcolare la fft del segnale
  - Calcolare il suo valore assoluto e normalizzarlo
  - Plottare lo spettro di ampiezza



Forma d'onda e spettro di ampiezza (3)

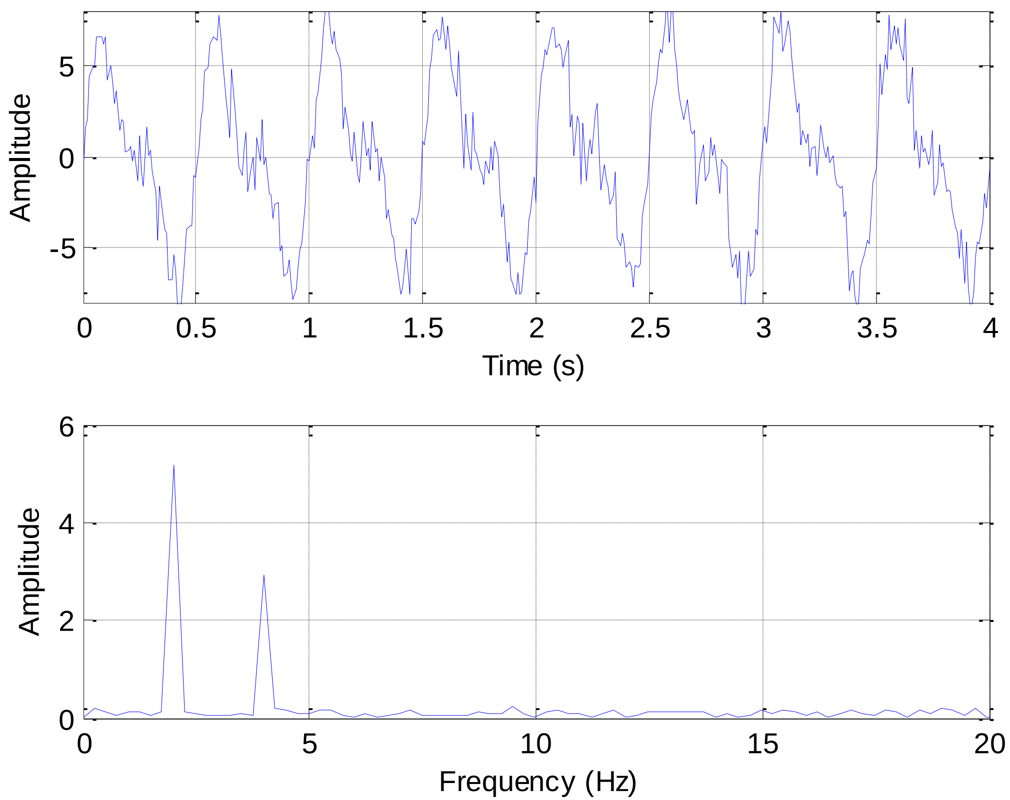


Filtraggio del rumore dai segnali

- Vediamo come usare la fft e la ifft per filtrare il rumore dai segnali.

- Esercizio **3**
  - Aggiungere al segnale dell'esercizio precedente del rumore casuale
  - Calcolare la trasformata del segnale rumoroso
  - Calcolare lo spettro di ampiezza
  - Plottare la forma d'onda e lo spettro di ampiezza

Filtraggio del rumore dai segnali (2)



Filtraggio del rumore dai segnali (3)

- Attraverso la ifft filtriamo il rumore. Il comando **fix** arrotonda gli elementi del suo argomento all'intero più vicino.

  - Settare i numeri <100 a zero (della transformata originale, senza processare)
  - ifft dei dati trasformati ed estrarre la parte reale
  - Plottare l'andamento dei campioni corretti

FFT in Matlab, numero di punti calcolati

- Sintassi: **fft(x,N)**
- N= numero di punti calcolati per la FFT
- Qual è l'effetto di modificare N?

- Eercizio **4**
  - Sintetizzare un **coseno** con 30 campioni e 10 campioni per periodo
  - Definire 3 valori diversi per N: 64,128,256
  - Plottare i 3 casi
  - Cosa sucede se N è uguale al numero di campioni in x?

Elaborazione nel dominio della frequenza

- The general idea is that the image (*f(x,y)* of size *M* x *N*) will be represented in the frequency domain (*F(u,v)*). The equation for the two-dimensional discrete Fourier transform (DFT) is:

$$F(u,v)=\sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1} f(x,y)e^{-j2\pi(ux/M+vy/N)}$$

- The concept behind the Fourier transform is that any waveform that can be constructed using a sum of sine and cosine waves of different frequencies. The exponential in the above formula can be expanded into sines and cosines with the variables u and v determining these frequencies.
- The inverse of the above discrete Fourier transform is given by the following equation:

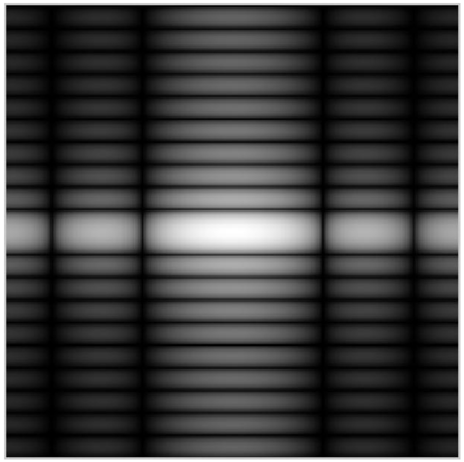
$$f(x,y)=\frac{1}{MN}\sum_{u=0}^{M-1}\sum_{v=0}^{N-1} F(u,v)e^{j2\pi(ux/M+vy/N)}$$

- Thus, if we have *F(u,v)*, we can obtain the corresponding image (*f(x,y)*) using the inverse, discrete Fourier transform.

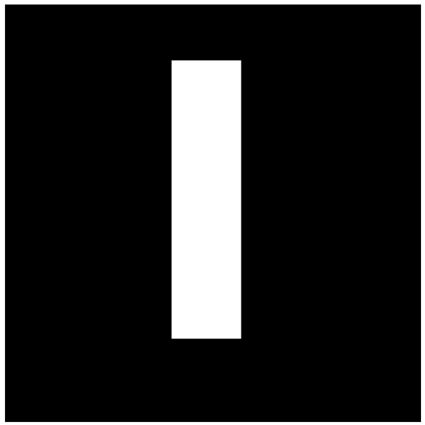
Visualizzazione dello spettro

- Esercizio **5**
  - Creare un'immagine 30x30 con un rettangolo bianco su sfondo nero
  - Calcolare la DFT e visualizzare lo spettro di ampiezza (**fft2**)
  - Aggiungere dello zero padding per migliorare il calcolo della DFT
  - Shiftare la componente zero al centro dello spettro (**fftshift**)
  - Per migliorare la visualizzazione usare la funzione **log**

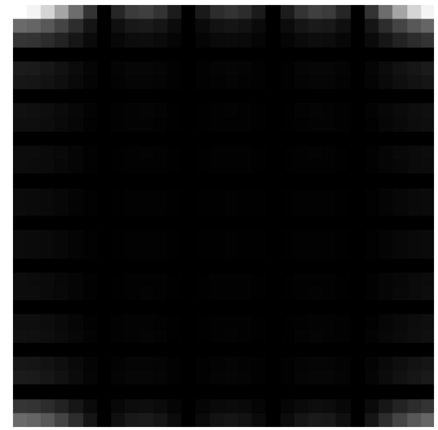
- Suggerimento per la visualizzazione usare **imshow(f,'InitialMagnification','fit')**



Visualizzazione dello spettro (2)

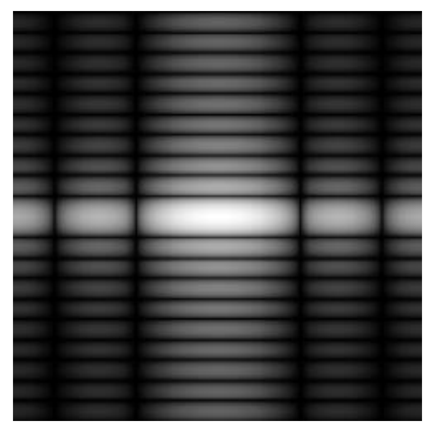


original



DFT

Zero-padded DFT



Centered and Log