

Matematica e Statistica

Prova d'esame (06/02/2013)

Università di Verona - Laurea in Biotecnologie - A.A. 2012/13

Matematica e Statistica

Prova di MATEMATICA (06/02/2013)

Università di Verona - Laurea in Biotecnologie - A.A. 2012/13

Cognome-Nome _____ Matr. _____
IN STAMPATELLO VR

*** Svolgere prima i punti (a) di tutti gli esercizi; solo in seguito i punti (b). ***

▶▶▶▶ Test a quiz sul retro ▶▶▶▶

- (1) (a) Nello spazio sono dati i vettori $\vec{v} = (1, 0, -1)$ e $\vec{w} = (2, 1, 0)$: trovare la decomposizione di $\vec{w}$ nelle direzioni parallela e ortogonale a $\vec{v}$, e (sia in forma parametrica che cartesiana) il piano Π parallelo a $\vec{v}$ e e passante per i punti $P(-3, 1, 3)$ e $Q(0, 0, -2)$, e la retta r passante per Q e ortogonale sia a $\vec{v}$ che a $\vec{w}$.
- (b) Tra i punti della parabola $x = y^2 + y$ sul piano orizzontale (x, y) , qual è il più vicino a Q ?
- (2) Studiare (giustificando le conclusioni) l'andamento di $f(x) = \log(2e^x + 1) - |x|$, e tracciarne il grafico.
- (3) (a) Calcolare gli integrali $\int_0^\pi (e^{3x} + x^2 \sin x) dx$ e $\int_0^1 \frac{1}{e^x + 2} dx$.
- (b) Disegnare $S = \{(x, y) : \sqrt{x+1} - 1 \leq y \leq 4 - |x-1|, 0 \leq x \leq 3\}$, e calcolarne l'area.
- (4) (a) Data $g(x, y) = (2xy - y^2)e^x$, determinarne dominio, zeri, segno e limiti interessanti, disegnando i risultati. Trovarne i punti stazionari ed eventuali estremi locali. Determinare il piano tangente al grafico di g sopra il punto $(0, -1)$.
- (b) Calcolare gli estremi assoluti di g sul triangolo pieno $\mathcal{T}$ di vertici $A(-4, -4)$, $B(-4, 4)$, $C(4, -4)$.
- (5) Sono date le equazioni differenziali $2y'e^x = x(y^2 + 1)$ e $y'' - 2y' + 2y = 4 - 5\cos x$.
- (a) Trovare le soluzioni di ciascuna delle due equazioni, specificando quali di esse hanno il grafico passante per l'origine.
- (b) Quali delle soluzioni ammettono un massimo locale per $x = 0$?

Matematica e Statistica

Prova di STATISTICA (06/02/2013)
Università di Verona - Laurea in Biotecnologie - A.A. 2012/13

Cognome-Nome _____ Matr. _____
IN STAMPATELLO VR

*** Attenzione: compiti illeggibili non verranno corretti ! ***

▶▶▶▶ Test a quiz sul retro ▶▶▶▶

Esercizio 1)

Si è lanciata una moneta 14 volte e si sono ricavati i seguenti esiti dove T = Testa e C = Croce.

T C T T C C C T T C T C T T

- Determini la tipologia del carattere.
- Fornisca una rappresentazione grafica dei dati.
- Si indichino e si calcolino tutti gli indici di posizioni adeguati ai dati.
- Si indichino gli indici di variabilità adeguati ai dati e, se possibile, se ne calcoli uno.
- Indicare e calcolare gli indici di posizione validi se, invece di usare le lettere T e C, si fossero indicati con il numero 0 l'esito di Testa e con il numero 1 l'esito di Croce.

Esercizio 2)

Un laboratorio di analisi si serve di acido solforico da un fornitore che garantisce che la concentrazione del prodotto ha un valore pari al 4%. Per verificare la veridicità della dichiarazione del fornitore si sono misurate le concentrazioni presenti in 21 confezioni ottenendo le seguenti misurazioni:

4.0% 3.8% 4.1% 4.0% 4.2% 4.0% 3.9% 3.9% 4.0% 4.0% 4.0%
3.9% 4.1% 3.8% 4.0% 3.9% 4.2% 4.0% 4.0% 4.0% 4.2%

Il candidato verifichi con un test di ipotesi ad un opportuno livello di significatività la validità dell'asserzione del fornitore. Il candidato, prima di procedere al test, indichi le necessarie ipotesi e proceda al calcolo anche qualora queste non siano verificate

Esercizio 3)

Il candidato, utilizzando i dati riportati nell'Esercizio 2, stimi puntualmente e per intervallo la varianza della v. c. che indica la concentrazione di acido solforico di una boccetta prodotta dal fornitore descritto nell'Esercizio 2. Prima di procedere alla stima il candidato indichi le necessarie ipotesi e proceda al calcolo anche qualora queste non siano verificate.

Esercizio 4)

Si considerino i seguenti eventi dichiarati incompatibili.

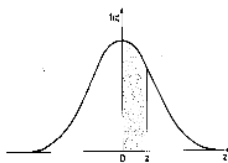
E_1 : si ottenga $x < 0.5$ dove x è estratto da una v. c. distribuita come una normale standardizzata.

E_2 : si ottenga $y = 0$ dove y è estratto da una v. c. distribuita come $Ber(0.8)$.

- Il candidato calcoli le seguenti Probabilità $P(E_1)$; $P(E_2)$; $P(E_1 \cup E_2)$ $P(E_1 | E_2)$.
- Il candidato fornisca la definizione di eventi statisticamente indipendenti ed indichi se i due eventi E_1 ed E_2 siano indipendenti.

Tavola I

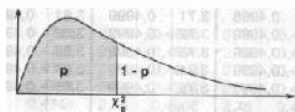
Integrali della variabile
casuale normale
standardizzata z



z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.0000	0.0040	0.0080	0.0120	0.0160	0.0199	0.0239	0.0279	0.0319	0.0359
0.1	0.0398	0.0438	0.0478	0.0517	0.0557	0.0596	0.0636	0.0675	0.0714	0.0753
0.2	0.0793	0.0832	0.0871	0.0910	0.0948	0.0987	0.1026	0.1064	0.1103	0.1141
0.3	0.1179	0.1217	0.1255	0.1293	0.1331	0.1368	0.1406	0.1443	0.1480	0.1517
0.4	0.1554	0.1591	0.1628	0.1664	0.1700	0.1736	0.1772	0.1808	0.1844	0.1879
0.5	0.1915	0.1950	0.1985	0.2019	0.2054	0.2088	0.2123	0.2157	0.2190	0.2224
0.6	0.2257	0.2291	0.2324	0.2357	0.2389	0.2422	0.2454	0.2486	0.2517	0.2549
0.7	0.2580	0.2611	0.2642	0.2673	0.2704	0.2734	0.2764	0.2794	0.2823	0.2852
0.8	0.2881	0.2910	0.2939	0.2967	0.2995	0.3023	0.3051	0.3078	0.3106	0.3133
0.9	0.3159	0.3186	0.3212	0.3238	0.3264	0.3289	0.3315	0.3340	0.3365	0.3389
1.0	0.3413	0.3438	0.3461	0.3485	0.3508	0.3531	0.3554	0.3577	0.3599	0.3621
1.1	0.3643	0.3665	0.3686	0.3708	0.3729	0.3749	0.3770	0.3790	0.3810	0.3830
1.2	0.3849	0.3869	0.3888	0.3907	0.3925	0.3944	0.3962	0.3980	0.3997	0.4015
1.3	0.4032	0.4049	0.4066	0.4082	0.4099	0.4115	0.4131	0.4147	0.4162	0.4177
1.4	0.4192	0.4207	0.4222	0.4236	0.4251	0.4265	0.4279	0.4292	0.4306	0.4319
1.5	0.4332	0.4345	0.4357	0.4370	0.4382	0.4394	0.4406	0.4418	0.4429	0.4441
1.6	0.4452	0.4463	0.4474	0.4484	0.4495	0.4505	0.4515	0.4525	0.4535	0.4545
1.7	0.4554	0.4564	0.4573	0.4582	0.4591	0.4599	0.4608	0.4616	0.4625	0.4633
1.8	0.4641	0.4649	0.4656	0.4664	0.4671	0.4678	0.4686	0.4693	0.4699	0.4706
1.9	0.4713	0.4719	0.4726	0.4732	0.4738	0.4744	0.4750	0.4756	0.4761	0.4767
2.0	0.4772	0.4778	0.4783	0.4788	0.4793	0.4798	0.4803	0.4808	0.4812	0.4817
2.1	0.4821	0.4826	0.4830	0.4834	0.4838	0.4842	0.4846	0.4850	0.4854	0.4857
2.2	0.4861	0.4864	0.4868	0.4871	0.4875	0.4878	0.4881	0.4884	0.4887	0.4890
2.3	0.4893	0.4896	0.4898	0.4901	0.4904	0.4906	0.4909	0.4911	0.4913	0.4916
2.4	0.4918	0.4920	0.4922	0.4925	0.4927	0.4929	0.4931	0.4932	0.4934	0.4936
2.5	0.4938	0.4940	0.4941	0.4943	0.4945	0.4946	0.4948	0.4949	0.4951	0.4952
2.6	0.4953	0.4955	0.4956	0.4957	0.4959	0.4960	0.4961	0.4962	0.4963	0.4964
2.7	0.4965	0.4966	0.4967	0.4968	0.4969	0.4970	0.4971	0.4972	0.4973	0.4974
2.8	0.4974	0.4975	0.4976	0.4977	0.4977	0.4978	0.4979	0.4979	0.4980	0.4981
2.9	0.4981	0.4982	0.4982	0.4983	0.4984	0.4984	0.4985	0.4985	0.4986	0.4986
3.0	0.4987	0.4987	0.4987	0.4988	0.4988	0.4989	0.4989	0.4989	0.4990	0.4990

Tavola II

Integrali della variabile
casuale chi quadrato a v
gradi di libertà.



p	0.005	0.01	0.025	0.05	0.10	0.25	0.50	0.75	0.90	0.95	0.975	0.99	0.995	0.999
1	0.0000	0.0002	0.0010	0.0039	0.0158	0.102	0.455	1.32	2.71	3.84	5.02	6.63	7.88	10.8
2	0.0100	0.0201	0.0508	0.103	0.211	0.575	1.39	2.77	4.61	5.99	7.38	9.21	10.6	13.8
3	0.0717	0.115	0.216	0.352	0.584	1.21	2.37	4.11	6.25	7.81	9.35	11.3	12.8	16.3
4	0.207	0.297	0.484	0.711	1.06	1.92	3.36	5.39	7.78	9.49	11.1	13.3	14.9	18.5
5	0.412	0.554	0.831	1.15	1.61	2.67	4.35	6.63	9.24	11.1	12.8	15.1	16.7	20.5
6	0.676	0.872	1.24	1.64	2.20	3.45	5.35	7.84	10.6	12.6	14.4	16.8	18.5	22.5
7	0.989	1.24	1.69	2.17	2.83	4.25	6.35	9.04	12.0	14.1	16.0	18.5	20.3	24.3
8	1.34	1.65	2.18	2.73	3.49	5.07	7.34	10.2	13.4	15.5	17.5	20.1	22.0	26.1
9	1.73	2.09	2.70	3.33	4.17	5.90	8.34	11.4	14.7	16.9	19.0	21.7	23.6	27.9
10	2.16	2.56	3.25	3.94	4.87	6.74	9.34	12.5	16.0	18.3	20.5	23.2	25.2	29.6
11	2.60	3.05	3.82	4.57	5.58	7.58	10.3	13.7	17.3	19.7	21.9	24.7	26.8	31.3
12	3.07	3.57	4.40	5.23	6.30	8.44	11.3	14.8	18.5	21.0	23.3	26.2	28.3	32.9
13	3.57	4.11	5.01	5.89	7.04	9.30	12.3	16.0	19.8	22.4	24.7	27.7	29.8	34.5
14	4.07	4.66	5.63	6.57	7.79	10.2	13.3	17.1	21.1	23.7	26.1	29.1	31.3	36.1
15	4.60	5.23	6.26	7.28	8.55	11.0	14.3	18.2	22.3	25.0	27.5	30.6	32.8	37.7
16	5.14	5.81	6.91	7.98	9.31	11.9	15.3	19.4	23.5	26.3	28.8	32.0	34.3	39.3
17	5.70	6.41	7.56	8.67	10.1	12.8	16.3	20.5	24.8	27.6	30.2	33.4	35.7	40.8
18	6.26	7.01	8.23	9.39	10.9	13.7	17.3	21.6	26.0	28.9	31.5	34.8	37.2	42.3
19	6.84	7.63	8.91	10.1	11.7	14.6	18.3	22.7	27.2	30.1	32.9	36.2	38.6	43.8
20	7.43	8.26	9.59	10.9	12.4	15.5	19.3	23.8	28.4	31.4	34.2	37.6	40.0	45.3
21	8.03	8.90	10.3	11.8	13.2	16.3	20.3	24.9	29.6	32.7	35.5	38.9	41.4	46.8
22	8.64	9.54	11.0	12.3	14.0	17.2	21.3	26.0	30.8	33.9	36.8	40.3	42.8	48.3
23	9.26	10.2	11.7	13.1	14.8	18.1	22.3	27.1	32.0	35.2	38.1	41.6	44.2	49.7
24	9.89	10.9	12.4	13.8	15.7	19.0	23.3	28.2	33.2	36.4	39.4	43.0	45.6	51.2
25	10.5	11.5	13.1	14.6	16.5	19.9	24.3	29.3	34.4	37.7	40.6	44.3	46.9	52.6
26	11.2	12.2	13.8	15.4	17.3	20.8	25.3	30.4	35.6	38.9	41.9	45.6	48.3	54.1
27	11.8	12.9	14.6	16.2	18.1	21.7	26.3	31.5	36.7	40.1	43.2	47.0	49.6	55.5
28	12.5	13.6	15.3	16.9	18.9	22.7	27.3	32.6	37.9	41.3	44.5	48.3	51.0	56.9
29	13.1	14.3	16.0	17.7	19.8	23.6	28.3	33.7	39.1	42.6	45.7	49.6	52.3	58.3
30	13.8	15.0	16.8	18.5	20.6	24.5	29.3	34.8	40.3	43.8	47.0	50.9	53.7	59.7

Soluzioni

MATEMATICA

- (1) (a) La componente di $\vec{w} = (2, 1, 0)$ parallela a $\vec{v} = (1, 0, -1)$ è data da $\vec{w}' = \frac{\vec{w} \cdot \vec{v}}{\vec{v} \cdot \vec{v}} \vec{v} = \frac{2}{2} \vec{v} = \vec{v}$, dunque la componente di $\vec{w}$ ortogonale a $\vec{v}$ è $\vec{w}'' = \vec{w} - \vec{w}' = \vec{w} - \vec{v} = (1, 1, 1)$. • Il piano Π parallelo a $\vec{v} = (1, 0, -1)$ e passante per i punti $P(-3, 1, 3)$ e $Q(0, 0, -2)$ sarà parallelo anche a $\vec{Q} - \vec{P} = (3, -1, -5)$, dunque ha forma parametrica $\Pi = \{(x, y, z) = (0, 0, -2) + s(1, 0, -1) + t(3, -1, -5) : s, t \in \mathbb{R}\} = \{(s + 3t, -t, -2 - s - 5t) : s, t \in \mathbb{R}\}$; sostituendo $t = -y$ e $s = x - 3t = x + 3y$ in $z = -2 - s - 5t$ si ottiene l'equazione cartesiana $x - 2y + z + 2 = 0$. • La retta r passante per Q e ortogonale sia a $\vec{v}$ che a $\vec{w}$ sarà parallela al prodotto vettoriale $\vec{v} \wedge \vec{w} = (1, -2, 1)$, da cui la forma parametrica $r = \{(x, y, z) = (0, 0, -2) + t(1, -2, 1) : t \in \mathbb{R}\} = \{(x, y, z) = (t, -2t, -2 + t) : t \in \mathbb{R}\}$; sostituendo $t = x$ nelle altre due coordinate si ottiene una forma cartesiana come sistema tra $2x + y = 0$ e $x - z - 2 = 0$.
- (b) La distanza tra il punto $Q(0, 0, -2)$ e il punto generico $P(y) = (y^2 + y, y, 0)$ della parabola $x = y^2 + y$ sul piano orizzontale (x, y) è data da $d(y) = \sqrt{(y^2 + y)^2 + y^2 + 4} = \sqrt{y^4 + 2y^3 + 2y^2 + 4}$. La derivata $d'(y) = \frac{y(2y^2 + 3y + 2)}{\sqrt{y^4 + 2y^3 + 2y^2 + 4}} \geq 0$ (ovvero $d(y)$ è crescente) per $y \geq 0$, dunque il punto della parabola più vicino a Q è $P(0) = (0, 0, 0)$ (l'origine, come era intuibile dovesse essere).
- (2) (Figura 1) La funzione $f(x) = \log(2e^x + 1) - |x|$ è definita purché $2e^x + 1 > 0$, il che è sempre vero: dunque il dominio è tutto $\mathbb{R}$. • Si ha $f(x) \geq 0$ quando $\log(2e^x + 1) \geq |x|$, ovvero (esponenziando ambo i membri) quando $2e^x + 1 \geq e^{|x|}$. Se $x \geq 0$ ciò dà $2e^x + 1 \geq e^x$, ovvero $e^x + 1 \geq 0$, sempre vera come > 0 e mai come $= 0$ (dunque per $x \geq 0$ la funzione è strettamente positiva, e priva di zeri); mentre se $x < 0$ ciò dà $2e^x + 1 \geq e^{-x}$, che moltiplicando per e^x equivale a $2e^{2x} + e^x \geq 1$, cioè $2e^{2x} + e^x - 1 \geq 0$, che posto $t = e^x$ dà $2t^2 + t - 1 \geq 0$, con soluzioni $t = e^x \leq -1$ (impossibile) oppure $t = e^x \geq \frac{1}{2}$, che dà $x \geq \log \frac{1}{2} = -\log 2 \sim -0,7$ (dunque per $x < 0$ la funzione si annulla in $x = -\log 2$, ed è strettamente positiva dopo). • I limiti interessanti sono in $\mp\infty$. In $-\infty$ il limite è determinato, e vale $-\infty$; invece il limite in $+\infty$ è in forma indeterminata $+\infty - \infty$, ma possiamo scrivere $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\log(2e^x + 1) - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\log(2e^x + 1) - \log e^x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \log \frac{2e^x + 1}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \log(2 + e^{-x}) = \log 2$. Dunque a $+\infty$ c'è l'asintoto orizzontale $y = \log 2$; notiamo che per $x > 0$ l'equazione $f(x) = \log 2$ non è mai verificata (esponenziando ambo i membri equivarrebbe a $(2e^x + 1)e^{-x} = 2$, ovvero $e^{-x} = 0$, impossibile), dunque poiché $f(0) = \log 3 > \log 2$ la funzione tende all'asintoto orizzontale decrescendo da sopra. Per $-\infty$ notiamo che vale $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\log(2e^x + 1) + x}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x(\frac{\log(2e^x + 1)}{x} + 1)}{x} = 1$, e che $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - 1x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \log(2e^x + 1) = 0$, dunque $y = x$ è asintoto obliquo a $-\infty$; notiamo che per $x < 0$ l'equazione $f(x) = x$ non è mai verificata (esponenziando ambo i membri equivarrebbe a $(2e^x + 1)e^x = e^x$, ovvero $2e^{2x} = 0$, impossibile), dunque la funzione tende anche all'asintoto obliquo restandovi sopra. Derivando, per $x \neq 0$ si ottiene $f'(x) = \frac{2e^x}{2e^x + 1} - \text{sign } x$. Per $x < 0$ si ha $f'(x) = \frac{2e^x}{2e^x + 1} + 1 > 0$, dunque f è strettamente crescente, mentre per $x > 0$ si ha $f'(x) = \frac{2e^x}{2e^x + 1} - 1 = -\frac{1}{2e^x + 1} < 0$, dunque f è strettamente decrescente. Ne ricaviamo anche che in $x = 0$ c'è necessariamente un punto di massimo assoluto per la funzione, con $f(0) = \sqrt{3}$; e si tratta di un punto angoloso, in quanto $f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = \frac{5}{3}$ e $f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = -\frac{1}{3}$. Infine, derivando ancora si ottiene $f''(x) = \frac{e^x}{(2e^x + 1)^2} > 0$, dunque f è strettamente convessa sia per $x < 0$ che per $x > 0$.
- (3) (a) Vale $\int (e^{3x} + x^2 \sin x) dx = \int e^{3x} dx + \int x^2 \sin x dx = \frac{1}{3}e^{3x} + x^2(-\cos x) - \int 2x(-\cos x) dx = \frac{1}{3}e^{3x} - x^2 \cos x + 2 \int x \cos x dx = \frac{1}{3}e^{3x} - x^2 \cos x + 2(x \sin x - \int 1(\sin x) dx) = \frac{1}{3}e^{3x} + 2x \sin x + (2 - x^2) \cos x + k$, dunque $\int_0^\pi (e^{3x} + x^2 \sin x) dx = (\frac{1}{3}e^{3x} + 2x \sin x + (2 - x^2) \cos x)|_0^\pi = (\frac{1}{3}e^{3\pi} - (2 - \pi^2)) - (\frac{1}{3}e^3 - 2) = \frac{1}{3}(e^{3\pi} - 13) + \pi^2$. • Ponendo $e^x = t$ (da cui $x = \log t$, dunque $dx = \frac{1}{t} dt$) si ha $\int_0^1 \frac{1}{e^x + 2} dx = \int_1^e \frac{1}{t(t+2)} dt = \frac{1}{2}(\int_1^e (\frac{1}{t} - \frac{1}{t+2}) dt) = (\frac{1}{2} \log |\frac{t}{t+2}|)|_1^e = \frac{1}{2}(\log \frac{e}{e+2} - \log \frac{1}{3}) = \frac{1}{2} \log \frac{3e}{e+2}$.
- (b) (Figura 2) La funzione $\sqrt{x+1} - 1$ è la radice quadrata traslata a sinistra di 1 e abbassata di 1; mentre la funzione $4 - |x - 1|$ vale $x + 3$ per $x < 1$ e vale $5 - x$ per $x \geq 1$. L'insieme S ne risulta allora come in Figura 2, ed avrà area $\int_0^1 (x+3) dx + \int_1^3 (5-x) dx - \int_0^3 (\sqrt{x+1} - 1) dx = (\frac{1}{2}x^2 + 3x)|_0^1 + (5x - \frac{1}{2}x^2)|_1^3 - (\frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}} - x)|_0^3 = (\frac{7}{2} - 0) + ((\frac{21}{2}) - (\frac{9}{2})) - ((\frac{7}{3}) - (\frac{2}{3})) = \frac{47}{6} \sim 7,9$.
- (4) (a) (Figura 3) Il dominio di $g(x, y) = (2xy - y^2)e^x$ è tutto il piano $\mathbb{R}^2$; si tratta di una funzione differenziabile, in quanto le derivate parziali $\frac{\partial g}{\partial x} = (2y + 2xy - y^2)e^x$ e $\frac{\partial g}{\partial y} = 2(x - y)e^x$ risultano continue nel dominio. La funzione si annulla quando si annulla $2xy - y^2 = y(2x - y)$, ovvero per $y = 0$ (l'asse x) e sulla retta $y = 2x$; il fattore y è positivo sopra l'asse x , il fattore $2x - y$ lo è sotto la retta $y = 2x$, e il segno di g ne segue per prodotto. L'unico limite

interessante è a ∞ , che non esiste: infatti tendendovi lungo l'asse x esso è nullo, mentre tendendovi lungo l'asse y (ovvero $x = 0$) la funzione diventa $-y^2$ e dunque tende a $-\infty$. I punti stazionari sono le soluzioni del sistema $\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial y} = 0$: da $\frac{\partial g}{\partial y} = 0$ si ricava $x = y$, che messo in $\frac{\partial g}{\partial x} = 0$ dà $2x(x+2)e^x = 0$, ovvero $x = 0$ oppure $x = -2$, da cui i punti $O(0,0)$ e $P(-2,-2)$. La matrice hessiana di g risulta $H_g(x,y) = \begin{pmatrix} (4y+2xy-y^2)e^x & 2(1+x-y)e^x \\ 2(1+x-y)e^x & -2e^x \end{pmatrix}$; essendo $H_g(O) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$ e $H_g(P) = \begin{pmatrix} -4e^{-2} & 2e^{-2} \\ 2e^{-2} & -2e^{-2} \end{pmatrix}$, il criterio dell'hessiano ci dice subito che O è un punto di sella mentre P è un punto di massimo relativo stretto. Infine, il piano tangente al grafico di g sopra il punto $(0,-1)$ ha equazione cartesiana $z = g(0,-1) + \frac{\partial g}{\partial x}(0,-1)(x-0) + \frac{\partial g}{\partial y}(0,-1)(y-(-1)) = -1 - 3x + 2(y+1)$, ovvero $3x - 2y + z - 1 = 0$.

(b) (Figura 3) Per la ricerca degli estremi assoluti di g sul triangolo pieno $\mathcal{T}$ di vertici $A(-4,-4)$, $B(-4,4)$, $C(4,-4)$ (che esistono in base a Weierstrass, essendo $\mathcal{T}$ un sottoinsieme compatto —ovvero chiuso e limitato— interamente contenuto nel dominio di g , che è continua) dividiamo $\mathcal{T}$ nelle zone $\mathcal{T}_0$ dei suoi punti interni; $\mathcal{T}_1$ del bordo orizzontale privato dei vertici; $\mathcal{T}_2$ del bordo verticale privato dei vertici; $\mathcal{T}_3$ del bordo obliquo privato dei vertici; e $\mathcal{L}_4 = \{A, B, C\}$ dei vertici. • Se massimo o minimo assoluti fossero assunti in un punto di $\mathcal{T}_0$, tale punto dovrebbe essere in particolare stazionario per g : come visto prima ce ne sono due, e l'unico dentro $\mathcal{T}_0$ è $P(-2,-2)$, che essendo di massimo relativo diventa un candidato per essere il punto di massimo assoluto per g su $\mathcal{T}$. • Sul lato $\mathcal{T}_1$ la funzione vale $\varphi_1(x) := g(x,-4) = -8(x+2)e^x$, con $|x| < 4$. Se massimo o minimo assoluti fossero assunti in un punto di $\mathcal{T}_1$, in tale punto dovrebbe annullarsi la derivata $\varphi_1'(x) = -8(x+3)e^x$, e ciò accade in $x = -3$. Otteniamo dunque un nuovo punto $D(-3,-4)$. • Similmente, sul lato $\mathcal{T}_2$ la funzione vale $\varphi_2(y) := g(-4,y) = -(8y+y^2)e^{-4}$ con $|y| < 4$; ma la derivata $\varphi_2'(y) = -(8+2y)e^{-4}$ si annulla in $y = -4$, che non soddisfa $|y| < 4$. • Sul lato $\mathcal{T}_3$ la funzione vale $\varphi_3(x) := g(x,-x) = -3x^2e^x$ con $|x| < 4$; la derivata $\varphi_3'(x) = -3(x^2+2x)e^x$ si annulla per $x = 0$ e $x = -2$, dunque otteniamo il già noto $O(0,0)$ e il nuovo punto $E(-2,2)$. • Infine, i tre punti A, B, C di $\mathcal{L}_4$ vanno tenuti tutti presenti. • Gli estremi assoluti di g su $\mathcal{T}$ potranno dunque assunti solo nell'ambito dei sette punti A, B, C, P, D, O, E : poiché $g(A) = 16e^{-4}$, $g(B) = -48e^{-4}$, $g(C) = -48e^4$, $g(P) = 4e^{-2}$, $g(D) = 8e^{-3}$, $g(O) = 0$ e $g(E) = -12e^{-2}$, il massimo assoluto di g su $\mathcal{T}$ è $4e^{-2}$ (assunto in P) e il minimo assoluto è $-48e^4$ (assunto in C).

- (5) (a) L'equazione differenziale $2y'e^x = x(y^2+1)$ è del primo ordine a variabili separabili. Notato che non vi sono soluzioni costanti (infatti y^2+1 non si annulla mai), separando le variabili si ottiene $\frac{2}{y^2+1} dy = x e^{-x} dx$, da cui integrando $2 \operatorname{arctg} y = -(x+1)e^{-x} + k$ con $k \in \mathbb{R}$, da cui $y(x) = \operatorname{tg}(\frac{k-(x+1)e^{-x}}{2})$ con $k \in \mathbb{R}$. Imponendo che il grafico passi per l'origine (ovvero $y(0) = 0$), da $2 \operatorname{arctg} y = -(x+1)e^{-x} + k$ si ricava che $0 = -1 + k$, ovvero $k = 1$, e si ottiene così $y(x) = \operatorname{tg}(\frac{1-(x+1)e^{-x}}{2})$. • L'equazione $y'' - 2y' + 2y = 4 - 5 \cos x$ è del secondo ordine, lineare a coefficienti costanti. L'equazione caratteristica $t^2 - 2t + 2 = 0$ ha soluzioni $t = 1 \mp i$, dunque lo spazio di soluzioni dell'equazione omogenea associata è $y(x) = e^x(A \cos x + B \sin x)$ al variare di $A, B \in \mathbb{R}$. Una soluzione particolare per la completa con $b_1(x) = 4$ è la costante $\tilde{y}_1(x) \equiv 2$, una particolare per la completa con $b_2(x) = -5 \cos x$ è del tipo $\tilde{y}_2(x) = a \cos x + b \sin x$, e i calcoli danno $(a,b) = (-1,2)$; dunque lo spazio di soluzioni dell'equazione completa è $y(x) = e^x(A \cos x + B \sin x) - \cos x + 2 \sin x$ al variare di $A, B \in \mathbb{R}$. Imponendo che $y(0) = 0$ si ha $0 = A - 1$, ovvero $A = 1$, ovvero le soluzioni $y(x) = e^x(\cos x + B \sin x) - \cos x + 2 \sin x$ al variare di $B \in \mathbb{R}$.

(b) Per vedere quali delle soluzioni delle equazioni date ammettono un massimo locale per $x = 0$ ricordiamo innanzitutto il seguente noto risultato, che poi applicheremo.

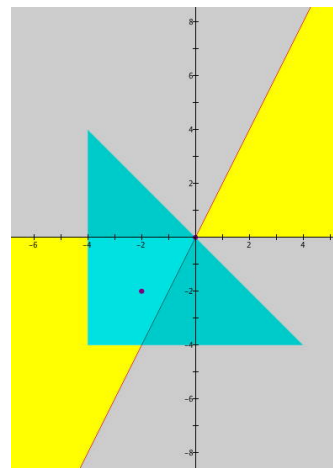
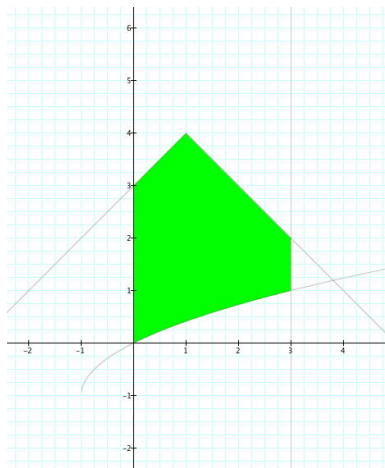
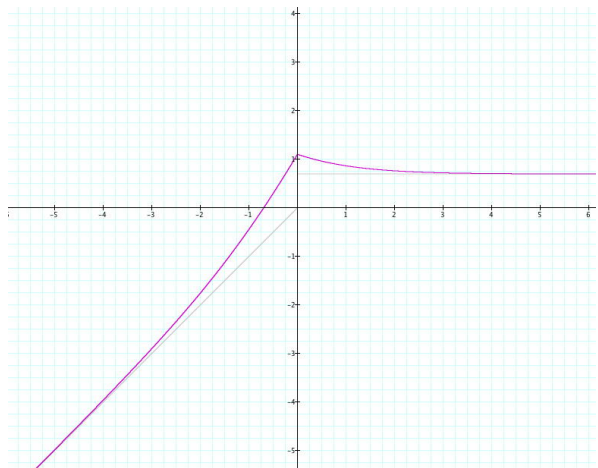
Sia $f(x)$ derivabile, e sia $f'(x_0) = 0$.

- (1) Se x_0 è un punto di massimo (risp. di minimo) locale per f , allora vale $f''(x_0) \leq 0$ (risp. vale $f''(x_0) \geq 0$).
- (2) Viceversa, sia $k \geq 2$ il minimo intero tale che $f^{(k)}(x_0) \neq 0$. Allora:
 - se k è pari e $f^{(k)}(x_0) > 0$ il punto x_0 è di minimo locale stretto;
 - se k è pari e $f^{(k)}(x_0) < 0$ il punto x_0 è di massimo locale stretto;
 - se k è dispari il punto x_0 è un flesso orizzontale.

• Le soluzioni di $2y'e^x = x(y^2+1)$ hanno tutte un punto stazionario in $x = 0$ (infatti da $y'(x) = \frac{x e^{-x}(y^2+1)}{2}$ si ricava $y'(0) = 0$). Derivando ambo i membri rispetto a x si ottiene $2(y''e^x + y'e^x) = 1(y^2+1) + x(2yy')$, da cui calcolando in $x = 0$ e ricordando che $y'(0) = 0$ si trova $2y''(0) = y^2(0) + 1$, da cui $y''(0) = \frac{y^2(0)+1}{2} > 0$ (naturalmente, del fatto che $y'(0) = 0$ e $y''(0) > 0$ avremmo potuto accorgercene anche derivando due volte la soluzione generica $y(x) = \operatorname{tg}(\frac{k-(x+1)e^{-x}}{2})$). Ne segue che per tutte le soluzioni il punto $x = 0$ è di minimo locale, pertanto per nessuna di esse è di massimo locale.

• Passiamo ora all'equazione del secondo ordine $y'' - 2y' + 2y = 4 - 5 \cos x$. Derivando la soluzione generica $y(x) = e^x(A \cos x + B \sin x) - \cos x + 2 \sin x$ si ottiene $y'(x) = e^x((A+B) \cos x + (B-A) \sin x) + \sin x + 2 \cos x$ e $y''(x) = e^x(2B \cos x - 2A \sin x) + \cos x - 2 \sin x$. Come detto, una condizione necessaria per ammettere un massimo locale per $x = 0$ è che $y'(0) = 0$ e che $y''(0) \leq 0$, ovvero $A+B+2 = 0$ e $2B+1 \leq 0$, ovvero $A = -B-2$ con $B \leq -\frac{1}{2}$. Se $y''(0) < 0$ (ovvero se $B < -\frac{1}{2}$) la condizione è anche sufficiente. Resta da controllare il caso di $B = -\frac{1}{2}$, in

cui dunque $A = -(-\frac{1}{2}) - 2 = -\frac{3}{2}$: da $y'''(x) = e^x((2B - 2A) \cos x + (-2A - 2B) \sin x) - \sin x - 2 \cos x$ si ricava $y'''(0) = 2B - 2A - 2 = -1 + 3 - 2 = 0$; e derivando ancora si ha $y''''(x) = e^x(-4A \cos x - 4B \sin x) - \cos x + 2 \sin x$, da cui $y''''(0) = -4A - 1 = 5 > 0$, dunque in questo caso limite c'è un minimo locale. Ricapitolando, le soluzioni di $y'' - 2y' + 2y = 4 - 5 \cos x$ che ammettono un massimo locale per $x = 0$ sono tutte e sole quelle del tipo $y(x) = e^x((-B - 2) \cos x + B \sin x) - \cos x + 2 \sin x$ con $B < -\frac{1}{2}$.



1. Il grafico della funzione dell'ex. **2.** L'insieme dell'ex. (3.b). **3.** Ex. (4.b): zeri (rosso), segno positivo (giallo) e negativo (grigio) della funzione g ; i punti stazionari (porpora); il triangolo $\mathcal{T}$ (azzurro).

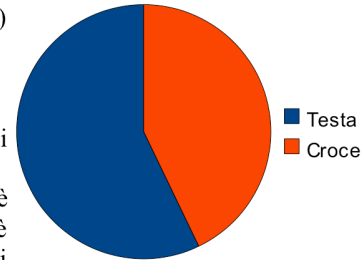
STATISTICA

a) *Determini la tipologia del carattere.*

Il carattere è di tipo qualitativo (in quanto espresso da esiti e non numeri) non ordinabile (gli esiti non possono essere ordinati).

b) *Fornisca una rappresentazione grafica opportuna.*

Per caratteri qualitativi non ordinabili sono possibili due tipologie di rappresentazioni grafiche: il diagramma a barre ed il diagramma a torta. In questa soluzione si è scelto di rappresentare il secondo. Un diagramma a torta è costituito da un cerchio diviso in settori, uno per modalità, la cui ampiezza è proporzionale alla frequenza relativa della modalità ad essa legata. A lato si mostra il diagramma relativo ai dati in oggetto.



c) *Si indichino e si calcolino tutti gli indici di posizioni adeguati ai dati.*

L'indice di posizione di una serie di osservazioni indica il valore centrale che viene assunto dalla serie. Gli indici di posizione visti a lezione sono tre: moda, mediana e media. Per i caratteri in esame sono calcolabili solo i primi due. La moda (ovvero la modalità cui corrisponde la modalità maggiore) della serie è Testa.

d) *Si indichino gli indici di variabilità adeguati ai dati e, se possibile, se ne calcoli uno.*

Per dati come qualitativi non è possibile determinare alcun indice di variabilità.

e) *Indicare e calcolare gli indici di posizione validi se, invece di usare le lettere T e C, si fossero indicati con il numero 0 l'esito di testa e con il numero 1 l'esito di croce.*

Nel caso di indici numerici (quantitativi) è possibile calcolare tutti gli indici visti a lezione.

- **Moda:** questo indice risulta calcolato in maniera analoga al punto precedente; moda = 0
- **Mediana:** questo indice identifica l'osservazione che bipartisce le osservazioni ordinate. Nel caso in esame l'osservazione deve essere preceduta da $(N-1)/2 = 13/2 = 6.5$ osservazioni. Poiché il numero non è tondo si esegue la media fra la settima e l'ottava osservazione. Essendo entrambe pari a 0 si ha che la mediana è 0.
- **Media:** la media di osservazioni con frequenze non unitarie è data dalla seguente formula:

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^M n_i x_i = \frac{1}{14} (8 \cdot 0 + 6 \cdot 1) = \frac{6}{14} = 0.4286$$

Esercizio 2)

Nel testo si effettuano diverse misure di una grandezza ignota da stimare. Possiamo modellare il processo di generazione dei dati come eseguire diverse estrazioni dalla variabile casuale

P : concentrazione di acido solforico in una confezione

avente distribuzione ignota. Si sono effettuate $n = 21$ osservazioni i. i. d. in cui si sono rilevate $M = 5$ modalità. Continuando con il modello precedentemente definito l'esercizio richiede di verificare l'ipotesi che $E[P] = 4$. L'ipotesi alternativa è quella che nel nostro caso è dannosa ovvero che la concentrazione sia diversa da quanto dichiarato. Riassumendo si hanno le seguenti ipotesi:

$$H_0: E[P] = 4$$

$$H_1: E[P] \neq 4$$

La scelta fra queste ipotesi può essere realizzata, utilizzando gli strumenti forniti nel corso, solo se le estrazioni sono indipendenti ed identicamente distribuite e se la dimensione del campione è pari ad almeno 30 unità. Avendo a disposizione solo 11 valori quest'ultima condizione non è verificata. Ciononostante il testo richiede di procedere in ogni caso al test.

Il primo passo in un test di ipotesi consiste nel determinare la distribuzione limite dello stimatore. In questo caso lo stimatore di riferimento è la media campionaria $\bar{X}$ la cui distribuzione limite è $\bar{X} \sim N(E[P], \frac{Var[P]}{n})$. Per valutare la distribuzione limite si deve stimare puntualmente la varianza tramite la varianza campionaria s^2 .

$$Var[\hat{P}] = s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^M n_i (x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{20} \sum_{i=1}^5 n_i (x_i - 4)^2 = 0.013$$

Si ottiene che la distribuzione limite dello stimatore è la seguente:

$$\bar{X} \sim N(E[P]; \frac{Var[P]}{n}) = N(4; \frac{0.013}{21}) = N(4; 0.0006)$$

Fissata la convergenza dello stimatore si procede alla determinazione della regione di accettazione posta per comodità sulla normale standardizzata. Essendo l'ipotesi alternativa un'ipotesi di disuguaglianza il tipo di test è detto a due code (o simmetrico). Ponendo un livello di significatività pari al 90% si ottengono i seguenti valori critici

$$z_{inf} = -1.65 \quad z_{sup} = 1.65$$

Determinata la regione di accettazione $A = [-1.65; 1.65]$ possiamo ora standardizzare il valore dello stimatore calcolato sui dati reali e vedere se esso è interno alla regione. Sfruttando i conti fatti in tabella 1 ricaviamo il valore dello stimatore

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^M n_i x_i = \frac{1}{21} 84 = 4$$

Che standardizzato diviene.

$$z_{\bar{x}} = \frac{\bar{x} - E[P]}{\sqrt{Var[P]}} = \frac{4 - 4}{\sqrt{0.0006}} = 0$$

Poiché il valore appartiene all'intervallo di accettazione, si accetta l'ipotesi nulla e si rifiuta l'ipotesi alternativa. Si ritiene dunque veritiera la dichiarazione del fornitore ad un livello di significatività del 90%.

Esercizio 3)

Continuando con il modello precedentemente fatto, l'esercizio richiede di stimare $E[X]$ puntualmente e per intervallo. Le ipotesi richieste sono le medesime descritte al punto precedente per tanto restano valide le stesse considerazioni. La stima puntuale può essere effettuata ricordando che la varianza viene stimata correttamente mediante la varianza campionaria. Il calcolo è già stato effettuato nello svolgimento del primo esercizio, ottenendo

$$Var[P] = s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^M n_i (x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{20} \sum_{i=1}^5 n_i (x_i - 4)^2 = 0.013$$

Le stime per intervallo sono regolate dal livello di confidenza $(1-\alpha)$ che solitamente è fissato da chi svolge l'analisi dei dati. Nel caso in esame una scelta valida è porre $\alpha = 10\%$. Determinato il livello di confidenza la stima I è data dalla seguente formula:

$$I = \left[\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)}, \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)} \right] = \left[\frac{20 \cdot 0.013}{\chi^2_{0.95}(20)}, \frac{20 \cdot 0.013}{\chi^2_{0.05}(20)} \right] = \left[\frac{0.26}{31.410}, \frac{0.26}{10.851} \right] = [0.008; 0.024]$$

i	x_i	n_i	$n_i x_i$	$(x_i - \bar{x})^2$	$n_i (x_i - \bar{x})^2$
1	3.8	2	7.60	0.04	0.0800
2	3.9	4	15.60	0.01	0.0400
3	4.0	10	40.00	0.00	0.0000
4	4.1	2	8.20	0.01	0.0200
5	4.2	3	12.60	0.04	0.1200
Somma		21	84.00		0.2600

Tabella 1 - conti esercizio 2 e 3

Esercizio 4)

a) Il candidato calcoli le seguenti Probabilità: $P(E_1)$; $P(E_2)$; $P(E_1 \cup E_2)$ $P(E_1 | E_2)$.

Per il calcolo di $P(E_1)$, si deve calcolare l'area sottesa dalla curva della densità di probabilità della distribuzione

normale da meno infinito a 0.5. Questa probabilità si può desumere dalle tavole. Si ottiene infatti che

$$P(E_1) = P(Z < 0.50) = 69.15\%$$

La probabilità dell'evento E_2 è pari alla probabilità di avere un esito negativo (ovvero pari a zero) estraendo un valore da una distribuzione di Bernoulli. Ricordando che una generica distribuzione di Bernoulli di parametro p (ovvero $Ber(p)$) sono possibili solo due esiti (0 ed 1) e che il parametro indica la probabilità dell'esito positivo si ottiene immediatamente che:

$$P(E_2) = P(X=0) = 1 - P(X=1) = 1 - p = 1 - 0.8 = 0.2$$

Propedeutico al calcolo delle altre due probabilità e il calcolo della probabilità dell'evento intersezione (ovvero che i due eventi si verificano contemporaneamente). Per eventi incompatibili essa è nulla per definizione

$$P(E_1 \cap E_2) = 0$$

Le restanti probabilità possono essere ricavate utilizzando la definizione assiomatica

$$P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2) = 0.6915 + 0.2 - 0 = 0.8915 \quad P(E_1 | E_2) = \frac{P(E_1 \cap E_2)}{P(E_2)} = \frac{0}{0.2} = 0$$

b) Il candidato fornisca la definizione di eventi statisticamente indipendenti ed indichi se i due eventi E_1 ed E_2 siano indipendenti.

Due eventi si dicono statisticamente indipendenti se il verificarsi di un evento non altera la probabilità del verificarsi dell'altro. Pertanto se due eventi sono statisticamente indipendenti la probabilità di un evento condizionato è pari all'evento stesso. Nel punto precedente questa probabilità risulta nulla e differente da $P(E_1)$, quindi i due eventi non sono incompatibili.