Diario del corso di Analisi Matematica 2

G. Orlandi

a.a. 2012-13

Vengono qui di seguito elencati gli argomenti trattati a lezione. Il diario servirà anche per definire il programma d'esame.

Lezione dell' 1/10/12 (2 ore). Proprietà assiomatiche di una funzione distanza su un insieme: positività, simmetria, diseguaglianza triangolare. Spazi metrici. Esempi: $\mathbb{R}$ ed $\mathbb{R}^n$ dotati della distanza euclidea. Distanza geodetica sulla sfera.

Proprietà assiomatiche di una norma su uno spazio vettoriale: positività, positiva 1-omogeneità, disuguaglianza triangolare. Esempi: il valore assoluto su $\mathbb{R}$, la norma euclidea $\|\cdot\|$ su $\mathbb{R}^n$. Definizione di norma ℓ^∞ su $\mathbb{R}^n$: per $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$, si pone $||x||_\infty = \sup\{|x_i|\,,\ i = 1, ..., n\}$. Defnizione di norma ℓ^1 su $\mathbb{R}^n$: $||x||_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$. Nel caso di una matrice $A = [a_{ij}]$ la norma ℓ^1 è data da $\|A\|_1 = \sum_{i,j} |a_{ij}|$. Si ha $\|A \cdot B\|_1 \leq \|A\|_1 \cdot \|B\|_1$.

Una norma $||\cdot||$ su uno spazio vettoriale V induce una distanza d su V definita da $d(x, y) = ||x - y||$ per $x, y \in V$. Se V è uno spazio euclideo, dotato cioè di un prodotto scalare $\langle\cdot,\cdot\rangle$, quest'ultimo definisce una norma (detta norma euclidea) $||v|| = \langle v, v\rangle^{1/2}$.

Lo spazio vettoriale $C^0([a, b]; \mathbb{R})$ delle funzioni $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue sull'intervallo $[a, b] \subset \mathbb{R}$ può essere dotato della norma ℓ^∞ (detta norma della convergenza uniforme) definita da $||f||_{\ell^\infty} \equiv \|f\|_\infty = \sup\{|f(t)|\,,\ t \in [a, b]\}$. Posto $M = \|f\|_\infty$, il grafico di f risulta confinato nel rettangolo $[a, b] \times [-M, M]$. Si può definire su $C^0([a, b]; \mathbb{R})$ anche la norma ℓ^1 (detta norma della convergenza in media) ponendo $||f||_{\ell^1} \equiv \|f\|_1 = \int_a^b |f(t)|dt$. Definizione di norma ℓ^2 su $C^0([a, b]; \mathbb{R})$:

$$||f||_{\ell^2} \equiv \|f\|_2 = \sqrt{\int_a^b |f(t)|^2 dt}.$$

Si tratta di una norma euclidea, indotta dal prodotto scalare $\langle f, g\rangle_{\ell^2} = \int_a^b f(t)g(t)dt$, definito per $f, g \in C^0([a, b]; \mathbb{R})$. Questa norma (detta della convergenza in media quadratica) è spesso usata in problemi di minima distanza (cfr. *metodo dei minimi quadrati*).

Osservazione: sia $g \in C^0([a,b])$, $g(x) \geq 0$ per ogni $x \in [a,b]$ e $\int_a^b g(x)dx = 0$. Allora $g(x) = 0$ per ogni $x \in [a,b]$. Da ciò discende che se $f \in C^0([a,b])$ ha norma ℓ^1 (o ℓ^2) nulla, allora $f(x) = 0$ per ogni $x \in [a,b]$.

Lezione del 2/10/12 (1 ora) Osservazione: $C^0([a,b];\mathbb{R})$ (e in genere gli spazi di funzioni che si considerano in analisi) è uno spazio vettoriale infinito dimensionale: infatti per ogni $n \in \mathbb{N}$, l'insieme $E_n = \{1, x, ..., x^n\}$ è linearmente indipendente, in quanto una combinazione lineare non nulla di elementi di E è un polinomio, e per il Teorema fondamentale dell'Algebra si annulla solo in un numero finito di punti (inferiore o uguale ad n), e non può pertanto coincidere con la funzione identicamente nulla su $[a,b]$.

Motivazione dell'uso della norma ℓ^2 per problemi di minima distanza (generalizzazione del *metodo dei minimi quadrati*, in uso ad es. per il calcolo di regressioni lineari in statistica, l'approssimazione mediante sviluppi di Fourier, la codifica JPEG di immagini,...), come ad esempio l'approssimazione di una funzione $f \in C^0([a,b])$ mediante polinomi di grado (inferiore o uguale a) n. Il polinomio che realizza la minima distanza (ovvero la migliore approssimazione in media quadratica) di f è la proiezione ortogonale di f (rispetto al prodotto scalare ℓ^2) sul sottospazio finito-dimensionale $V :=$span$< v_0, v_1, ..., v_n >$, dove per $i = 0, 1, ..., n$ si è posto $v_i(x) = x^i$, $x \in [a,b]$. Pertanto, il polinomio Q che realizza la minima distanza è dato da

$$Q(x) = \sum_{i=0}^{n} \langle f,\, e_i \rangle_{\ell^2([a,b])} \cdot e_i(x) = \sum_{i=0}^{n} \left[\int_a^b f(t) e_i(t) dt \right] \cdot e_i(x) \,, \quad x \in [a,b],$$

dove $\{e_i\}_{i=0,\dots,n}$ è una base ortonormale di V, costruibile applicando il processo di ortonormalizzazione di Gram-Schmidt alla base $\{v_0, v_1, ..., v_n\}$ di V. A lezione è stato svolto il caso particolare $[a,b] = [0,1]$, $n = 1$.

Lezione del 4/10/12 (2 ore). Nozione di limite di successione in uno spazio metrico (X, d): dati $x_n, x_0 \in X$, si dice che $x_n \to x_0$ in X se $d(x_n, x_0) \to 0$ per $n \to +\infty$.

Definizione di funzione continua tra spazi metrici: $f : (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ è continua in $x_0 \in X$ se $\forall \epsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ tale che $d_X(x, x_0) < \delta$ implica $d_Y(f(x), f(x_0)) < \epsilon$.

Caratterizzazione della continuità: $f : X \to Y$ è continua in $x_0 \in X$ se e solo se per ogni successione $x_n \to x_0$ in X si ha $f(x_n) \to f(x_0)$ in Y.

Esempio di una funzione continua su $C^0([a,b])$: la funzione $F : C^0([a,b];\mathbb{R}) \to C^0([a,b];\mathbb{R})$ che associa ad f la sua funzione integrale $F(f)$ definita da $F(f)(x) = \int_a^x f(t)dt$ è una funzione continua rispetto alla norma ℓ^∞. Infatti, si ha la seguente stima:

$$\begin{aligned} |F(f)(x) - F(g)(x)| &= |F(f-g)(x)| = |\int_a^x [f(t) - g(t)]\, dt| \\ &\leq \int_a^x |f(t) - g(t)| dt \leq \int_a^x ||f - g||_\infty dt \\ &\leq ||f - g||_\infty \cdot (x - a) \qquad \forall\, a \leq x \leq b \,, \end{aligned}$$

da cui i ricava, passando al sup su $x \in [a, b]$ ad ambo i membri,

$$||F(f) - F(g)||_\infty \leq (b - a)||f - g||_\infty \,,$$

da cui si deduce che se $||f-g||_\infty \to 0$, allora $||F(f)-F(g)||_\infty \to 0$. ovvero la continuità della funzione F.

Definizione di convergenza uniforme: date $f, f_n : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ si dice che le f_n convergono uniformemente ad f in I se

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in I} |f_n(x) - f(x)| \equiv \lim_{n\to+\infty} ||f_n - f||_{\ell^\infty(I)} = 0 \,.$$

Defininzione di convergenza puntuale: le f_n convergono puntualmente ad f in I se $\forall\, x \in I$, $\lim_n |f_n(x) - f(x)| = 0$.

La convergenza uniforme implica quella puntuale, mentre il viceversa non è vero in generale: si prenda ad esempio $I = [0, 1]$, $f_n(x) = n\cdot x$ per $0 \leq x \leq 1/n$, $f_n(x) = 2-n\cdot x$ per $1/n \leq x \leq 2/n$, e $f_n(x) = 0$ per $2/n \leq x \leq 1$. Si ha $f_n(x) \to 0$ per ogni $x \in I$, ma $||f_n||_\infty = 1\ \forall\, n$, per cui non vi può essere convergenza uniforme alla funzione identicamente nulla.

Proprietà della convergenza uniforme: siano $f_n, f : I \to \mathbb{R}$ tali che $||f_n-f||_{\ell^\infty(I)} \to 0$ per $n \to +\infty$.

1) se le f_n sono continue, allora f è continua.

2) se $I = [a, b]$, $\lim_n \int_a^b f_n(t)dt = \int_a^b \lim_n f_n(t)dt = \int_a^b f(t)dt$ (passaggio al limite sotto il segno di integrale).

3) se $f_n \in C^1([a, b]; \mathbb{R})$ (ossia $f_n, f_n' \in C^0([a, b]; \mathbb{R})$) e $f_n \to f$, $f_n' \to g$ uniformemente in $[a, b]$, allora $g = f'$ su $[a, b]$.

Applicazione di 2) : dato che per una serie di potenze vale il teorema di integrazione per serie, si può calcolare ad esempio

$$\int_a^b e^{-x^2} dx = \int_a^b \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} x^{2k} \right) dx = \sum_{k=0}^{\infty} \int_a^b \frac{(-1)^k}{k!} x^{2k} dx = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (b^{2k+1} - a^{2k+1})}{(2k+1)k!} \,.$$

Alcuni esempi mostrano come la convergenza puntuale non sia sufficiente in generale, a garantire la validità dei passaggi al limite 1) 2) e 3).

Lezione del 5/10/12 (3 ore). Dimostrazione dei punti 1) 2) 3) della lezione precedente:

2) Dall'esempio della lezione precedente sulla continuità della trasformata integrale F si deduce, ponendo $g = f_n$ ed $x = b$, che

$$\left| \int_a^b f(t)dt - \int_a^b f_n(t)dt \right| \leq (b - a) \cdot ||f_n - f||_{\ell^\infty([a,b])} \to 0 \qquad \text{per } n \to +\infty \,.$$

3) Si ha $f_n(x)-f_n(a) = \int_a^x f_n'(t)dt$, ed il primo membro converge a $f(x)-f(a)$ perchè le f_n in particolare convergono puntualmente, mentre il secondo membro converge a $\int_a^b g(t)dt$ per la convergenza uniforme di f_n' su $[a,b]$ ed il passaggio al limite sotto il segno di integrale.

1) Per ogni $\epsilon > 0$ si ha, per ogni $n > n_0$, $||f_n - f||_\infty < \epsilon$. Sia $x_0 \in [a,b]$ e fissato $n > n_0$, sia $\delta > 0$ tale che $|f_n(x) - f_n(x_0| < \epsilon$ per $|x - x_0| < \delta$ (tale δ esiste per la continuità di f_n). Allora, per ogni $x \in [a,b]$, $|x - x_0| < \delta$, si ha, per la diseguaglianza triangolare,

$$|f(x) - f(x_0)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f(x_0)| \leq 3\epsilon\,,$$

ovvero f è continua in x_0, per ogni $x_0 \in [a,b]$.

Nel caso particolare delle serie di funzioni, cioè quando $f_n(x) = \sum_{k=0}^n u_k(x)$, con $u_k : [a,b] \to \mathbb{R}$, le proprietà della convergenza uniforme si traducono come segue: date $u_k \in C^0([a,b];\mathbb{R})$, se la serie $\sum_{k=0}^\infty u_k(x)$ converge uniformemente in $[a,b]$, allora converge ad una funzione continua. Inoltre, vale

$$\int_a^b \left(\sum_{k=0}^\infty u_k(t)\right) dt = \sum_{k=0}^\infty \int_a^b u_k(t)dt \qquad \text{(integrazione per serie)}.$$

Se inoltre $u_k \in C^1([a,b];\mathbb{R})$ e $\sum_{k=0}^\infty u_k'(x)$ converge uniformemente in $[a,b]$ allora

$$\left(\sum_{k=0}^\infty u_k(x)\right)' = \sum_{k=0}^\infty u_k'(x) \qquad \text{(derivazione per serie)}.$$

Successioni di Cauchy in uno spazio metrico. Una successione convergente è di Cauchy. Spazi metrici completi: sono quelli in cui tutte le successioni di Cauchy convergono. Esempi: $\mathbb{R}$ ed $\mathbb{R}^n$, con la distanza euclidea (o una qualunque norma).

Osservazione: lo spazio $C^0([a,b])$ *non è completo* rispetto alla convergenza in media, o in media quadratica: si consideri ad esempio la successione $f_n \in C^0([-1,1])$ e la funzione discontinua f definite rispettivamente da $f_n(x) = 0$ se $-1 \leq x \leq -1/n$, $f_n(x) = nx + 1$ se $-1/n \leq x \leq 0$, $f_n(x) = 1$ se $0 \leq x \leq 1$, e da $f(x) = 0$ per $1 \leq x < 0$ e $f(x) = 1$ se $0 \leq x \leq 1$. Si ha $||f_n - f||_1 = \int_{-1/n}^0 (nx+1)\,dx = 1/2n \to 0$. Quindi f_n è una successione di Cauchy rispetto alla norma ℓ^1 (in quanto successione convergente), ma il limite f non è una funzione continua.

Osservazione: lo spazio metrico completo rispetto alla norma L^1 è lo spazio delle funzioni sommabili *secondo Lebesgue* $L^1([a,b]) = \{f : [a,b] \to \mathbb{R}\,,\ \int_a^b |f(x)|dx < +\infty\}$. Analogamente è completo rispetto alla norma L^2 lo spazio $L^2([a,b]) = \{f : [a,b] \to \mathbb{R}\,,\ \int_a^b |f(x)|^2 dx < +\infty\}$ delle funzioni a quadrato sommabile *secondo Lebesgue.*

Teorema: $C^0([a,b];\mathbb{R})$ dotato della norma $|| \cdot ||_\infty$ è completo.

Dimostrazione: data una successione di Cauchy $\{f_n\} \subset C^0([a,b];\mathbb{R})$, per ogni $\epsilon > 0$ $\exists\ n_0$ tale che $\forall n, m > n_0\ ||f_n - f_m||_\infty < \epsilon$. In particolare, per ogni $a \leq x \leq b$ si ha $|f_n(x) - f_m(x)| < \epsilon$, dunque $\{f_n(x)\}$ è di Cauchy in $\mathbb{R}\ \forall\ a \leq x \leq b$, ed è dunque convergente per la completezza di $\mathbb{R}$. Detto $f(x) = \lim_m f_m(x)$, si ha $|f_n(x) - f(x)| = \lim_m |f_n(x) - f_m(x)| \leq \epsilon\ \forall\, n > n_0$, $\forall\ a \leq x \leq b$. Passando al sup su $x \in [a,b]$ si ottiene $||f_n - f||_\infty \leq \epsilon\ \forall\, n > n_0$, ovvero $||f_n - f||_\infty \to 0$ per $n \to +\infty$. Inoltre, $f \in C^0([a,b];\mathbb{R})$ in quanto limite uniforme di funzioni continue. Pertanto la successione $\{f_n\}$ converge in $C^0([a,b];\mathbb{R})$ rispetto alla norma ℓ^∞. □

Osservazione (non svolto a lezione): sia $L^\infty(I;\mathbb{R}) = \{f : I \to \mathbb{R}\,,\ ||f||_\infty < +\infty\}$ lo spazio delle funzioni limitate, definite su un intervallo $I \subset \mathbb{R}$. La prima parte della dimostrazione della completezza di $C^0([a,b];\mathbb{R})$ dimostra in realtà che $L^\infty(I;\mathbb{R})$ dotato della norma L^∞ è uno spazio metrico completo.

Un criterio utile per la convergenza uniforme di una serie di funzioni è il criterio di convergenza totale (di Weierstrass). Lo enunciamo nel quadro più generale degli spazi normati.

Teorema della convergenza totale: sia $(X, ||\cdot||)$ uno spazio vettoriale normato completo. Sia $\{u_k\} \subset X$. Se la serie delle norme $\sum_{k=0}^\infty ||u_k||$ è convergente in $\mathbb{R}$, allora la serie $\sum_{k=0}^\infty u_k$ è convergente in X, ovvero $\lim_n ||\sum_{k=n}^\infty u_k|| = 0$.

Dimostrazione: detta $y_n = \sum_{k=0}^n u_k$ la successione delle somme parziali, dimostriamo che $\{y_n\}$ è di Cauchy in X: si ha, per la disuguaglianza triangolare,

$$||y_n - y_m|| = ||\sum_{k=n+1}^{m} u_k|| \leq \sum_{k=n+1}^{m} ||u_k|| < \epsilon \qquad \text{per ogni } m > n > n_0\,,$$

dato che la successione numerica $s_n = \sum_{k=0}^n ||u_k||$ è di Cauchy in $\mathbb{R}$ per ipotesi, e $\sum_{k=n+1}^m ||u_k|| = s_m - s_n$. □

Lezione dell' 8/10/12 (2 ore). Applicazioni del criterio di convergenza totale: in $\mathbb{R}$ ed in $\mathbb{C}$ corrisponde al criterio di convergenza assoluta. In particolare è ben definito, per $z \in \mathbb{C}$ l'esponenziale complesso $e^z = \sum_{k=0}^\infty \frac{z^k}{k!}$, dato che $\sum \frac{|z|^k}{k!} = e^{|z|} < +\infty$ per ogni $z \in \mathbb{C}$ (NB: per $z = x + iy \in \mathbb{C}$, si definisce $|z| = (z\bar{z})^{1/2} = (x^2 + y^2)^{1/2}$), e sono verificate in particolare le formule di Eulero $e^{iy} = \sum \frac{(iy)^k}{k!} = \cos y + i \sin y$.

Esponenziale di matrice: sia $M_n(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^{n^2}$ lo spazio delle matrici quadrate di ordine n dotato della norma $\|\cdot\|_1$. Rimane ben definita, per ogni $A \in M_n(\mathbb{R})$, la matrice $\exp(A) \equiv e^A = \sum_{k=0}^\infty \frac{1}{k!} A^k$, dato che per la serie delle norme si ha $\sum \frac{1}{k!}\|A^k\|_1 \leq \sum \frac{1}{k!}\|A\|_1^k = e^{\|A\|_1} < +\infty$.

Applicazione alla convergenza delle serie di potenze. Dati $c_k \in \mathbb{C}$, sia $\sum_{k=0}^\infty c_k(z - z_0)^k$ una serie di potenze complesse centrata in $z_0 \in \mathbb{C}$, e sia $r > 0$ il suo raggio di convergenza, ovvero $r^{-1} = \limsup_k |a_k|^{1/k}$. La serie converge uniformemente in $D_R(z_0) = \{z \in \mathbb{C}\,,\ |z - z_0| \leq R\}$ per ogni $0 < R < r$, e quindi in particolare converge ad una funzione continua su $B_r(z_0) = \{z \in \mathbb{C}\,,\ |z - z_0| < r\}$.

Dimostrazione: si ha

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sup_{|z-z_0|\le R} |c_k| \cdot |z-z_0|^k = \sum_{k=0}^{\infty} |c_k| R^k \; < +\infty \,,$$

poichè per il criterio della radice

$$\limsup_{k\to+\infty} \sqrt[k]{|c_k|R^k} = \left(\limsup_{k\to+\infty} \sqrt[k]{|c_k|} \right) \cdot R = r^{-1} R < 1 \,.$$

Si può dunque applicare il criterio di convergenza totale nello spazio $C^0(D_R(z_0);\mathbb{C})$ dotato della norma L^∞. □

Osservazione: le stesse proprietà di convergenza si ottengono per la serie di potenze reale $\sum a_k(x-x_0)^k$ su $[x_0-R, x_0+R]$ per ogni $R < r$, dove $r > 0$ è il raggio di convergenza della serie.

In particolare, per una serie di potenze vale il teorema di integrazione per serie.

Inoltre, dato che la serie delle derivate di una serie di potenze è a sua volta una serie di potenze con lo stesso raggio di convergenza, vale anche il teorema di derivazione per serie. Iterando il ragionamento si deduce che una serie di potenze converge ad una funzione di classe C^∞ (ovvero dotata di derivate continue di ogni ordine).

Osservazione: la regola di derivazione per serie di potenze può essere utilizzata ad esempio per la ricerca di soluzioni di equazioni differenziali sotto forma di serie di potenze $\sum a_k x^k$ (esempio: equazioni lineari a coefficienti polinomiali come l'equazione di Bessel (di ordine n) $x^2y''+xy'+(x^2-n^2)y=0$), trasformando l'equazione differenziale in un sistema triangolare per i coefficienti a_k.

Lezione dell' 11/10/12 (1 ora). Sviluppi in serie di Fourier per funzioni 2π-periodiche. Motivazioni: risoluzione di equazioni differenziali della fisica matematica (ad esempio l'equazione del calore), analisi in frequenza, approssimazione e codifica di segnali ed immagini (JPEG), ovvero funzioni che presentano tipicamente delle zone di discontinuità insieme a regioni in cui possono essere molto regolari. Ad una funzione $f:[-\pi,\pi]\to\mathbb{R}$ tale che $\int_{-\pi}^{\pi}|f(t)|^2dt < +\infty$ si associa la funzione $S_n(f)$ che rappresenta la migliore approssimazione in norma $L^2([-\pi,\pi])$ di f mediante polinomi trigonometrici di grado (inferiore o uguale a) n, ovvero un elemento del sottospazio $(2n+1)$-dimensionale $\mathcal{P}_n \subset L^2([-\pi,\pi])$ dato da

$$\mathcal{P}_n = \text{span} < 1, \;\; \cos kt \,, \;\; \sin kt \; >_{k=1,\dots,n} \;\; .$$

Dato che questa base di $\mathcal{P}_n$ è ortogonale, si ottiene la formula di rappresentazione $S_n(f)(t) = \dfrac{a_0}{2} + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k\cos(kt) + b_k\sin(kt)$, con i coefficienti di Fourier di f dati da

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt, \quad a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(kt)dt, \quad b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(kt)dt, \quad 1\le k\le n.$$

Lezione del 12/10/12 (3 ore). Teorema di Fourier: se $f \in L^2([-\pi,\pi])$ (ad es. f continua a tratti) allora $||f - S_n(f)||_{L^2([-\pi.\pi])} \to 0$ per $n \to +\infty$, ovvero la serie di Fourier di f, definita da $\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cdot \cos(kt) + b_k \cdot \sin(kt)$ converge in media quadratica ad f.

Osservazione: la norma L^2 (come la norma L^1), essendo una norma integrale, non distingue due funzioni i cui valori differiscono su un numero finito di punti del dominio (in particolare una almeno delle due funzioni non può essere continua), quindi non è una norma in senso stretto su $L^2([a,b])$ (rispettivamente $L^1([a,b])$), mentre lo è in senso stretto su $C^0([a,b])$. Il Teorema di Fourier afferma che la differenza in norma ℓ^2 tra la serie di Fourier di f e la funzione stessa f è nulla: per quanto osservato, questo non significa a priori che la serie di Fourier converga puntualmente ad f su tutto l'intervallo $[-\pi,\pi]$. Esempio (onda quadra): sia f definita da $f(x) = 1$ se $0 < x < \pi$, $f(x) = -1$ se $-\pi < x < 0$ e siano $f(0), f(\pm\pi)$ definite ad arbitrio. La serie di Fourier di f converge puntualmente ad f per $x \neq 0, \pm\pi$. Inoltre, in $0, \pm\pi$ la sua somma vale zero, indipendentemente dai valori assunti da $f(0), f(\pm\pi)$.

Proprietà delle serie di Fourier. Diseguaglianza di Bessel:

$$||f - S_n(f)||^2_{\ell^2([-\pi.\pi])} = \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt - \left(\pi \frac{a_0^2}{2} + \pi \sum_{k=1}^{n} a_k^2 + b_k^2 \right) \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

In particolare, facendo tendere $n \to +\infty$ si ricava il decadimento a zero dei coefficienti di Fourier $a_k \to 0$, $b_k \to 0$ per $k \to +\infty$ (Lemma di Riemann-Lebesgue). Dal Teorema di Fourier si ottiene inoltre l'identità di Parseval (alias Teorema di Pitagora in $L^2([-\pi,\pi])$):

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt = \pi \frac{a_0^2}{2} + \pi \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 + b_k^2 \,.$$

Forma complessa dei coefficienti di Fourier: posto $c_j = \frac{a_j - ib_j}{2}$, $c_{-j} = \frac{a_j + ib_j}{2}$ per $j > 0$, $c_0 = \frac{a_0}{2}$, si ha

$$S_n(f)(t) = \sum_{k=-n}^{n} c_k \cdot e^{ikt} \,, \qquad \text{con } c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ikt} dt \,.$$

Coefficienti di Fourier della derivata: sia $f \in L^2([-\pi,\pi])$ derivabile con derivata $f' \in L^2([-\pi,\pi])$. Detti a_k, b_k (o, in forma complessa, c_k) i coefficienti di Fourier di f, e rispettivamente α_k, β_k e γ_k i coefficienti di Fourier di f' si ha la relazione $\alpha_0 = 0$, $\alpha_k = kb_k$, $\beta_k = ka_k$ e $\gamma_k = (-ik)c_k$, ossia ad un'operazione differenziale su f (nello spazio "fisico") corrisponde un'operazone algebrica (moltiplicazione) sui suoi coefficienti di Fourier (nello spazio delle "frequenze").

Dall'identità di Parseval per la derivata si ottiene in particolare

$$\pi \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^2 + \beta_k^2 = \pi \sum_{k=1}^{\infty} k^2 (a_k^2 + b_k^2) = \int_{-\pi}^{\pi} |f'(t)|^2 dt \,,$$

da cui si deduce che quanto più una funzione è regolare (ossia quante più derivate possegga) tanto più rapido è il decadimento a zero dei suoi coefficienti di Fourier.

Convergenza puntuale delle serie di Fourier: se (l'estensione periodica di) f è continua a tratti in $\mathbb{R}$ (e le discontinuità sono di tipo salto), e per ogni x in cui f è continua esistono finite la derivata destra e sinistra, allora la serie di Fourier di f converge puntualmente alla media dei limiti destro e sinistro di f (in particolare converge ad f nei punti di continuità di f).

Convergenza uniforme delle serie di Fourier: sia f 2π- periodica, di classe C^1 a tratti (ossia f continua a tratti e con derivata continua a tratti. In realtà basta f continua a tratti e $f' \in L^2([-\pi, \pi])$). Allora la serie di Fourier di f converge uniformemente ad f in ogni intervallo $[a, b]$ in cui f è continua.

Dimostrazione nel caso $f \in C^0([-\pi, \pi])$ e $f' \in L^2([-\pi, \pi])$: dallo studio della convergenza totale della serie di Fourier di f si ricava

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\infty} \sup_{t\in[-\pi,\pi]} |a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt)| &\leq \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| + |b_k| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}(k|a_k| + k|b_k|) \\
&\leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k^2} + \frac{k^2}{2}(a_k^2 + b_k^2) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k^2} + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f'(t)|^2 dt < +\infty \,,
\end{aligned}
$$

da cui la convergenza uniforme della serie di Fourier su $[-\pi, \pi]$ (e, per periodicità, su tutto $\mathbb{R}$) ad una funzione periodica $g \in C^0([-\pi, \pi])$. Questa coincide con f, come si può dedurre invocando il teorema di convergenza puntuale, o quello di Fourier di convergenza in media quadratica: si ha infatti

$$
||g - S_n(f)||_{\ell^2([-\pi.\pi])} \leq \sqrt{2\pi}||g - S_n(f)||_{\ell^\infty([-\pi,\pi])} \to 0 \qquad \text{per } n \to +\infty,
$$

da cui

$$
||g - f||_{\ell^2([-\pi,\pi])} \leq ||g - S_n(f)||_{\ell^2([-\pi.\pi])} + ||S_n(f) - f||_{\ell^2([-\pi.\pi])} \to 0 \qquad \text{per } n \to +\infty.
$$

Dalla condizione $\int_{-\pi}^{\pi} |g(t) - f(t)|^2 dt = 0$ si deduce, per la continuità di $|g(t) - f(t)|$, che $|g(t) - f(t)| = 0$ per ogni $t \in [-\pi, \pi]$, ossia $g = f$.

Lezione del 15/10/12 (2 ore). Il principio delle contrazioni in uno spazio metrico completo (teorema di punto fisso di Banach-Caccioppoli): dato (X, d) spazio metrico completo, $T : X \to X$ una contrazione (ossia $\exists\, K < 1$ tale che $d(T(x), T(y)) \leq K \cdot d(x, y)\ \forall\, x, y \in X$), allora esiste un'unico punto fisso $\bar{x} \in X$ di T (ovvero un'unica soluzione $\bar{x}$ in X dell'equazione $x = T(x)$).

La dimostrazione è costruttiva, mediante uno schema iterativo, e fornisce anche una stima dell'errore. Sia $x_0 \in X$, definiamo per ricorrenza la successione $x_{n+1} = T(x_n)$, per $n \in \mathbb{N}$. Due i casi: o $x_{n+1} = x_n$ per un certo $n \in \mathbb{N}$, e quindi $x_n = x_{n+1} = T(x_n)$ è punto fisso di T, oppure rimane definita una successione $\{x_n\} \subset X$, che risulta essere di Cauchy in X. Infatti, si ha

$$d(x_{n+1}, x_n) = d(T(x_n), T(x_{n-1})) \leq K \cdot d(x_n, x_{n-1}) \leq \cdots \leq K^n \cdot d(x_1, x_0)\,,$$

da cui si deduce che, per $m > n+1 > n_0$, per la disuguaglianza triangolare,

$$\begin{aligned} d(x_m, x_n) &\leq \sum_{j=n}^{m-1} d(x_{j+1}, x_j) \leq \sum_{j=n}^{m-1} K^j \cdot d(x_1, x_0) = K^n \cdot d(x_1, x_0) \sum_{j=0}^{m-n-1} K^j \\ &\leq K^n \cdot d(x_1, x_0) \sum_{j=0}^{\infty} K^j \leq K^{n_0} \frac{d(x_1, x_0)}{1-K} < \epsilon \end{aligned}$$

per n_0 sufficientemente grande, e per ogni $m > n+1 > n_0$, ovvero $\{x_n\}$ è di Cauchy in X. Sia $\lim_m x_m = \bar{x} \in X$ per la completezza di X.

Passando al limite per $m \to +\infty$ nella disuguaglianza precedente, si ottiene la stima dell'errore $d(\bar{x}, x_n) \leq K^n \frac{d(x_1, x_0)}{1-K}$. Inoltre, passando al limite per $n \to +\infty$ nella relazione di ricorrenza $x_{n+1} = T(x_n)$, dato che $x_{n+1} \to \bar{x}$ e $T(x_n) \to T(\bar{x})$ per la continuità di T (data dalla condizione di Lipschitz $d(T(\bar{x}), T(x_n)) \leq K \cdot d(\bar{x}, x_n)$), si deduce $\bar{x} = T(\bar{x})$, e dunque $\bar{x}$ è un punto fisso di T.

Supponendo $\hat{x} \in X$ sia un qualunque punto fisso di T, si ha $d(\hat{x}, \bar{x}) = d(T(\hat{x}), T(\bar{x})) \leq K \cdot d(\hat{x}, \bar{x})$, ossia $(1-K) \cdot d(\hat{x}, \bar{x}) \leq 0$, da cui $d(\hat{x}, \bar{x}) \leq 0$ e dunque $\hat{x} = \bar{x}$, ovvero l'unicità del punto fisso. $\square$

Il principio delle contrazioni si applica nelle più svariate situazioni: ad esempio, per dimostrare il Teorema di Cauchy-Lipschitz di esistenza e unicità locale per soluzioni di problemi di Cauchy (per equazioni e sistemi di equazioni differenziali), oppure il Teorema del Dini delle funzioni implicite/inverse (esistenza e unicità locale per soluzioni di sistemi di equazioni algebriche non lineari), o anche per provare la dipendenza continua delle soluzioni di equazioni differenziali dai dati del problema. Inoltre, gli aspetti costruttivi e la stima quantitativa dell'errore hanno numerose applicazioni numeriche.

Esempio: problema di Cauchy per sistemi differenziali lineari omogenei ed esponenziale di matrice. Data A matrice $n \times n$, si consideri il problema di Cauchy dato dal sistema di n equazioni differenziali $y' = Ay$, con la condizione iniziale $y(0) = y_0$. Detta $y : [-\delta, \delta] \to \mathbb{R}^n$ la soluzione, integrando su $[0, t]$ ambo i membri del sistema di equazioni differenziali e tenendo conto della condizione iniziale, si ottiene che $y(t)$ verifica l'equazione di punto fisso $y = Ty$, dove la trasformazione $T : C^0([-\delta, \delta]; \mathbb{R}^n) \to C^0([-\delta, \delta]; \mathbb{R}^n)$ è definita da $Ty(t) = y_0 + \int_0^t A \cdot y(s)\, ds$. Si ha

$$||Ty_1 - Ty_2||_{L^\infty([-\delta,\delta])} = \left|\left| \int_0^t A(y_1(s) - y_2(s))\, ds \right|\right|_{L^\infty([-\delta,\delta])} \leq \delta ||A||_1 \cdot ||y_1 - y_2||_{L^\infty([-\delta,\delta])}\,,$$

ossia T è una contrazione sullo spazio metrico completo $C^0([-\delta, \delta]; \mathbb{R}^n)$ dotato della norma L^∞ non appena $\delta \cdot ||A||_1 < 1$. Inizializzando lo schema iterativo ponendo

$y_0(t) = y_0$ per $-\delta \leq t \leq \delta$, si ottiene $y_n(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} t^k A^k y_0$, che converge alla soluzione

$$y(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k A^k}{k!} y_0 = \exp(tA) \cdot y_0, \qquad (\text{nota: } \forall\, t \in \mathbb{R}\,),$$

dove $\exp(tA) = e^{tA}$ è l'esponenziale della matrice tA.

Esempio: metodo di Newton (o delle tangenti) per il calcolo degli zeri di una funzione non lineare $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Supponiamo $f \in C^2([a, b])$, e che per un certo $a < \bar{x} < b$ si abbia $f(\bar{x}) = 0$, che inoltre sia $|f'(x)| \geq m > 0$, $|f''(x)| \leq \delta$ e $|f(x)| \leq K m^2 \delta^{-1}$ $\forall\, x \in [a, b]$, per un certo $K < 1$.

Lo schema di Newton per la determinazione di $\bar{x}$ consiste nella seguente successione definita per ricorrenza: fissato $a < x_0 < b$, si pone, per $n \in \mathbb{N}$,

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = T(x_n),$$

ed in particolare si ha $f(x) = 0$ se e solo se $x = T(x)$. Essendo $|T'(x)| = \frac{|f(x) \cdot f''(x)|}{|f'(x)|^2} \leq K$ per ogni $x \in [a, b]$, si ha, per il teorema del valor medio,

$$|T(y_1) - T(y_2)| = |T'(\xi)| \cdot |y_2 - y_1| \leq K|y_2 - y_1| \qquad \forall\, y_1, y_2 \in [a, b]\,,$$

ovvero T è una contrazione. Inoltre vale la stima dell'errore

$$|x_{n+1} - \bar{x}| = |T(x_n) - \bar{x}| \leq \frac{\delta}{2m} |x_n - \bar{x}|^2 \qquad \forall\, n \in \mathbb{N} \text{ (ovvero } \forall\, x_n \in [a, b]\,),$$

da cui si deduce che se $\min\{|a - \bar{x}|, |b - \bar{x}|\} \geq \frac{\delta}{2m} \max\{|a - \bar{x}|^2, |b - \bar{x}|^2\}$ vale $T([a, b]) \subset [a, b]$ (in soldoni, $|a - \bar{x}|$ e $|b - \bar{x}|$ devono avere lo stesso ordine di grandezza, inferiore a $\frac{2m}{\delta}$), e per il principio delle contrazioni lo schema di Newton converge a $\bar{x}$.

(Nota: per le ipotesi su f', questa ha un segno definito su $[a, b]$. Se anche f'' ha un segno definito su $[a, b]$, allora, se è ad esempio $f'(x) \geq m$ e $f''(x) \geq 0$, si ha automaticamente $T([\bar{x}, b]) \subset [\bar{x}, b]$, ovvero lo schema di Newton è monotono decrescente se $\bar{x} < x_0 \leq b$).

Lezione del 18/10/12 (1 ora). Funzioni vettoriali di una variabile reale (curve in $\mathbb{R}^n$): derivazione per componenti, interpretazione geometrica della derivata come vettore tangente alla curva immagine. Interpretazione fisica come vettore velocità associato alla legge oraria di un punto materiale. Equazione parametrica della retta tangente alla curva immagine: una parametrizzazione canonica è data dallo sviluppo di Taylor di f arrestato al primo ordine. Velocità scalare, lunghezza di una curva.

Funzioni di più variabili reali. Domini (si considereranno domini D che siano insiemi aperti, o contenuti nella chiusura di insiemi aperti). Insiemi di livello, sottolivello, sopralivello. Funzioni continue. Gli insiemi di livello di una funzione continua sono chiusi nel dominio della funzione, i sopralivelli e i sottolivelli sono aperti. Grafico Γ_f di una funzione di più variabili $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$: $\Gamma_f = \{(x_1, ..., x_n, x_{n+1}) : (x_1, ..., x_n) \in D,\ x_{n+1} = f(x_1, ..., x_n)\}$.

lezione del 19/10/12 (3 ore). Insiemi compatti per successioni. Teorema di Weierstrass: una funzione continua su un insieme compatto per successioni di $\mathbb{R}^n$ (in generale, su uno spazio metrico compatto per successioni) ammette massimo e minimo. Dimostrazione (non visto a lezione): sia $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ con D compatto per successioni. Data una successione massimizzante $\{p_n\} \subset D$ (ossia $f(p_n) \to \sup_D f$) esiste una sottosuccessione $p_{n_k} \to \bar{p} \in D$, da cui $f(p_{n_k}) \to f(\bar{p})$ per continuit'a di f. D'altra parte, si ha anche $f(p_{n_k}) \to \sup_D f$, da cui la tesi.

Definizione: dato X spazio metrico, $A \subset X$ si dice limitato se $A \subset B(x_0, r)$ per un certo $x_0 \in X$ ed $r > 0$. L'insieme A si dice totalmente limitato se $\forall\, \epsilon > 0$ esiste una ϵ-rete di A, ovvero $\exists\ x_1, ..., x_N \in X$ (con N dipendente da ϵ) tale che $A \subset \cup_j B(x_j, \epsilon)$.

Caratterizzazione degli insiemi compatti per successioni: in $\mathbb{R}^n$, un insieme è compatto per successioni se e solo se è chiuso e limitato; in generale, uno spazio metrico (X, d) è compatto per successioni se e solo se è completo e totalmente limitato.

Derivabilità per funzioni di più variabili. Derivata direzionale di una funzione $f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ in $p_0 \in \Omega$: data una direzone $e \in \mathbb{R}^2$ (ossia $e = (a, b)$ con $a^2 + b^2 = 1$), la retta passante per $p_0 = (x_0, y_0)$ avente direzione e è data da $t \mapsto r(t) = (x_0+ta, y_0+tb)$, e la derivata nella direzione e di f in p_0 è definita da $D_e f(p_0) = \frac{d}{dt}|_{t=0} f(r(t)) = \frac{d}{dt}|_{t=0} f(x_0 + ta, y_0 + tb)$. Se $e = (1, 0)$ (risp. $e = (0, 1)$) si pone $D_e f(p_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ (risp. $D_e f(p_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$), e tale derivata si chiama derivata parziale rispetto a x (risp. rispetto a y). Esempi di calcolo di derivate parziali.

Interpretazione geometrica delle derivate direzionali: sia $\Gamma_f = \{(x, y, f(x, y)) \in \mathbb{R}^3\,,\ (x, y) \in \Omega\,\}$ il grafico di f. La mappa $t \mapsto (x_0 + ta, y_0 + tb, f(x_0 + ta, y_0 + tb))$ ha come immagine la curva costituita dalla restrizione del grafico di f alla retta $r(t)$ di cui sopra, passante per $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ per $t = 0$. Il vettore

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} (x_0 + ta, y_0 + tb, f(x_0 + ta, y_0 + tb)) = (a, b, D_e f(x_0, y_0)\,),$$

applicato nel punto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$, è dunque un vettore tangente al grafico di f in $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$, la cui componente orizzontale è la direzione $e = (a, b)$, e la cui componente verticale è la derivata direzionale di f nella direzione e in p_0.

Esempio di una funzione che ammette derivate parziali ma non è continua. Esistono esempi di funzioni f che ammettono tutte le derivate direzionali in un certo punto p_0, ma non sono continue in p_0.

Funzioni differenziabili. Differenziale $df(p_0) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ di una funzione $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ in un punto $p_0 \in \Omega$. Si tratta di un'applicazione lineare che verifica

$$\lim_{p \to p_0} \frac{|f(p) - f(p_0) - df(p_0) \cdot (p - p_0)|}{|p - p_0|} = 0\,.$$

In altre parole, per una funzione differenziabile in p_0 vale lo sviluppo di Taylor al primo ordine

$$f(p) = f(p_0) + df(p_0) \cdot (p - p_0) + o(|p - p_0|)\,.$$

Se f è differenziabile in p_0 allora esistono le derivate direzionali di f in p_0 e si ha $D_e f(p_0) = df(p_0) \cdot e$ per ogni direzione $e \in \mathbb{R}^n$.

Se f è differenziabile in p_0, l'equazione cartesiana del piano tangente al grafico di f in $(p_0, f(p_0)) \in \mathbb{R}^{n+1}$ è data da $x_{n+1} = f(p_0) + df(p_0) \cdot (p - p_0)$, ovvero

$$x_{n+1} = f(p_0) + \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{0,i}) \cdot \frac{\partial f}{\partial x_i}(p_0), \quad \text{dove } p = (x_1, ..., x_n) \quad \text{e } p_0 = (x_{0,1}, ..., x_{0,n}).$$

Detta $e_1, ..., e_n, e_{n+1}$ la base canonica di $\mathbb{R}^{n+1}$, il piano tangente al grafico è generato dai vettori $\{e_i + e_{n+1} \cdot \frac{\partial f}{\partial x_i}(p_0)\}_{i=1,...,n}$ (a lezione abbiamo visto il caso $n = 2$). Un vettore normale al piano tangente in $(p_0, f(p_0))$ è dato dal vettore $N_{p_0} = (\frac{\partial f}{\partial x_1}(p_0), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(p_0), -1) \in \mathbb{R}^{n+1}$.

Il differenziale $df(p_0)$ si rappresenta mediante il gradiente $\nabla f(p_0) = (\frac{\partial f}{\partial x_1}(p_0), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(p_0)) \in \mathbb{R}^n$, ovvero si ha $df(p_0) \cdot v = \langle \nabla f(p_0), v\rangle$ per ogni $v \in \mathbb{R}^n$. Il gradiente individua la direzione di massima crescita di f in p_0, ossia

$$\max_{|e|=1} D_e f(p_0) = \max_{|e|=1} \langle \nabla f(p_0), e\rangle = |\nabla f(p_0)|\,, \quad \text{per } e = \frac{\nabla f(p_0)}{|\nabla f(p_0)|}.$$

Lo schema di flusso gradiente per la determinazione di massimi locali di una funzione: dato $p_0 = (x_{0,1}, ..., x_{0,n}) \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$, si tratta di risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \frac{dp}{dt} = \nabla f(p) \\ p(0) = p_0\,, \end{cases}$$

ovvero il sistema di equazioni differenziali ordinarie

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, ..., x_n) \\ \vdots \\ \frac{dx_n}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_1, ..., x_n) \\ x_i(0) = x_{0,i} \qquad\qquad i = 1, ..., n. \end{cases}$$

Detto $\bar{p} = \lim_{t\to+\infty} p(t)$, se $\bar{p} \in \Omega$ allora $\nabla f(\bar{p}) = 0$, ossia $\bar{p}$ è un punto critico, che, per una scelta generica del dato iniziale p_0 risulta essere di massimo locale. L'analogo schema $\frac{dp}{dt} = -\nabla f(p)$ per trovare i minimi locali anche detto schema di discesa gradiente.

Lezione del 22/10/12 (2 ore). Ortogonalità del gradiente rispetto agli insiemi di livello. Continuità di una funzione differenziabile. Condizioni sufficienti per la differenziabilità, teorema del differenziale totale: se in un intorno $B(p_0, r)$ esistono le derivate parziali di f e sono continue in p_0, allora f è differenziabile in p_0. Dimostrazione del teorema del differenziale totale. Funzioni di classe C^1.

Differenziale di funzioni vettoriali. Se $f = (f_1, ..., f_m) : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $p_0 \in \Omega$ e $v = (v_1, ..., v_n) \in \mathbb{R}^n$, si ha la rappresentazione mediante la matrice Jacobiana $Df(p_0) \equiv \frac{\partial\{f_1,...,f_m\}}{\partial\{x_1,...,x_n\}}(p_0)$:

$$df(p_0) \cdot v = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(p_0) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(p_0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(p_0) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(p_0) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$$

Esempi di funzioni vettoriali. Trasformazioni di coordinate: matrice Jacobiana $\frac{\partial\{x,y\}}{\partial\{r,\theta\}}$ della trasformazione in coordinate polari. Coordinate cilindriche (r, θ, z) e sferiche (r, θ, ϕ) per $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ e rispettive matrici Jacobiane.

Esempi di campi vettoriali: gradienti di funzioni scalari. Espressione del campo gravitazionale generato da una massa puntiforme posta nell'origine: detto $U(p) = K/|p|$ il potenziale gravitazionale, si ha $\vec{F}(p) = \nabla U(p) = -Kp/|p|^3 = -Kr^{-2}\hat{\imath}_r$, dove $r = |p|$, $\hat{\imath}_r = p/|p|$ e $K > 0$ una costante opportuna.

Superfici parametriche e cartesiane, vettori tangenti, vettore normale. Data la parametrizzazione, di classe C^1, $\vec{r}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \in \mathbb{R}^3$, con $(u, v) \in D \subset \mathbb{R}^2$, i vettori colonna della matrice Jacobiana $D\vec{r}(p_0)$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}(p_0) \equiv \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}(p_0) \\ \frac{\partial y}{\partial u}(p_0) \\ \frac{\partial z}{\partial u}(p_0) \end{bmatrix}, \qquad \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}(p_0) \equiv \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial v}(p_0) \\ \frac{\partial y}{\partial v}(p_0) \\ \frac{\partial z}{\partial v}(p_0) \end{bmatrix}$$

sono vettori tangenti alla superficie $S = \{\vec{r}(u, v)\,, (u, v) \in D\} \subset \mathbb{R}^3$ nel punto $\vec{r}(p_0) \in S$, e ne generano il piano tangente qualora siano linearmente indipendenti.

Lezione del 25/10/12 (1 ora). Equazione del piano tangente ad una superficie parametrica. Vettore normale ad una superficie, nozione di orientazione. Un vettore $N(p_0)$ normale alla superficie in $\vec{r}(p_0) \in S$ si ottiene, in modo canonico, mediante il prodotto vettoriale $N = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}$.

Regola della catena per il differenziale composto: se $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ e $g : U \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ sono funzioni differenziabili rispettivamente in $p_0 \in \Omega$ e $q_0 = f(p_0) \in U$, allora $h = g \circ f : \Omega \to \mathbb{R}^k$ è differenziabile in p_0 e vale $dh(p_0) = d(g \circ f)(p_0) = dg(f(p_0)) \cdot df(p_0)$. In termini delle matrici Jacobiane,

$$\left[\frac{\partial h_i}{\partial x_j}(p_0)\right] = \left[\frac{\partial g_i}{\partial y_\ell}(f(p_0))\right] \cdot \left[\frac{\partial f_\ell}{\partial x_j}(p_0)\right], \quad \text{ossia} \quad \frac{\partial h_i}{\partial x_j}(p_0) = \sum_{\ell=1}^{m} \frac{\partial g_i}{\partial y_\ell}(f(p_0))\frac{\partial f_\ell}{\partial x_j}(p_0)\,.$$

Applicazione: ortogonalità del gradiente rispetto agli insiemi di livello. Data una funzione $f \in C^1(D; \mathbb{R})$, e dato l'insieme di livello $f^{-1}(c)$, $c \in \mathbb{R}$, se $p_0 \in f^{-1}(c)$ e

$\nabla f(p_0) \neq 0$, quest'ultimo vettore risulta ortogonale a $f^{-1}(c)$ in p_0. Dimostrazione (caso $n = 2$): supponendo che intorno a p_0 l'insieme di livello si possa descrivere mediante una curva parametrica $p(t) = (x(t), y(t))$ di classe C^1, detta $g(t) = f((x(t), y(t))$ la funzione composta, si ha, applicando la regola della catena:

$$0 = \frac{dg}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} =< \nabla f, \frac{dp}{dt} >,$$

ovvero la condizione di ortogonalità.

Nota: l'ipotesi che l'insieme di livello sia parametrizzabile intorno a p_0 è sempre soddisfatta nel caso $\nabla f(p_0) \neq 0$, in virtù del Teorema delle funzioni implicite.

Lezione del 26/10/12 (3 ore). Esempi di implementazione della regola della catena (con vari abusi di notazione): data $z = z(x, y, w)$ e $w = w(x, y)$ si vuole calcolare il tasso di variazione $\frac{\partial z}{\partial x}$ (NB: abuso di notazione!) della funzione composta $g(x, y) := z(x, y, w(x, y))$ al variare di x mantenendo y fissata. Dato che variando x varia anche w, si ottiene

$$\frac{\partial z}{\partial x} \left(\equiv \frac{\partial g}{\partial x} \right) = \left[\frac{\partial z}{\partial x} \right]_{y,w} + \frac{\partial z}{\partial w} \cdot \frac{\partial w}{\partial x},$$

dove per $[\frac{\partial z}{\partial x}]_{y,w}$ si intende la derivata parziale di z rispetto al primo argomento (in questo caso x) mantenendo costanti i rimanenti due (in questo caso y e w).

Data la quantità scalare $T = T(x, y, z, t)$ (ad es. la temperatura misurata nel punto $p = (x, y, z)$ all'istante t) e la legge oraria $p(t) = (x(t), y(t), z(t))$ di un punto materiale, si vuole calcolare il tasso di variazione $\frac{dT}{dt}$ (NB: abuso di notazione!) della quantità T (al variare di t) misurata da un termometro solidale con il punto materiale $p(t)$, ovvero, detta $\tau(t) = T(x(t), y(t), z(t), t)$ la temperatura misurata dal termometro nel punto $p(t)$, si vuole calcolare $\frac{d\tau}{dt}$: si ha quindi

$$\frac{dT}{dt} \left(\equiv \frac{d\tau}{dt} \right) = \frac{\partial T}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial T}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{\partial T}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dt} + \frac{\partial T}{\partial t}.$$

Derivate parziali di ordine superiore. Matrice Hessiana delle derivate parziali seconde.Teorema di Schwarz: se $f \in C^2(\Omega; \mathbb{R})$ (ovvero esistono le derivate parziali seconde e sono continue in D) allora la matrice Hessiana $D^2 f(p) = [\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(p)]$ è simmetrica per ogni $p \in D$.

Sviluppo di Taylor al secondo ordine per $f \in C^2(D; \mathbb{R})$ in $p_0 \in D \subset \mathbb{R}^n$: sia $v = (v_1, ..., v_n) \in \mathbb{R}^n$, $p \equiv p(t) = p_0 + tv \in D$ per $0 \leq t \leq t_0$. Posto $g(t) = f(p(t))$, si ha

$$g'(t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(p(t))v_i = \langle \nabla f(p), v \rangle, \quad g''(t) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(p(t))v_j v_i = \langle D^2 f(p) \cdot v, \, v \rangle .$$

Dallo sviluppo di Taylor $g(t) = g(0) + tg'(0) + \frac{t^2}{2} g''(0) + o(t^2)$ si ottiene

$$f(p) = f(p_0) + \langle \nabla f(p_0), p - p_0 \rangle + \frac{1}{2} \langle D^2 f(p_0) \cdot (p - p_0), \, (p - p_0) \rangle + o(|p - p_0|^2) .$$

Lezione del 29/10/12 (2 ore). Studio della natura dei punti critici di $f \in C^2(D, \mathbb{R})$: se p_0 è un punto critico di f (ossia $\nabla f(p_0) = 0$), allora lo sviluppo di Taylor al secondo ordine si riduce a

$$f(p) = f(p_0) + \frac{1}{2} \langle D^2 f(p_0) \cdot (p - p_0), (p - p_0) \rangle + o(|p - p_0|^2) .$$

Sia $R \in O(n)$ tale che $R^t \cdot D^2 f(p_0) \cdot R =$diag $(\lambda_1, ..., \lambda_n)$, con $\lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{R}$ autovalori di $D^2 f(p_0)$, e sia $p - p_0 = R \cdot w$, con $w = (w_1, ..., w_n) \in \mathbb{R}^n$. Si ha

$$\begin{aligned} \langle D^2 f(p_0) \cdot (p - p_0), (p - p_0) \rangle &= \langle D^2 f(p_0) \cdot R \cdot w, R \cdot w \rangle = \langle R^t \cdot D^2 f(p_0) \cdot R \cdot w, w \rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i w_i^2 . \end{aligned}$$

Otteniamo dunque, tenendo conto che $|w|^2 = |Rw|^2 = |p - p_0|^2$,

$$f(p) = f(p_0) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i w_i^2 + o(|w|^2) ,$$

da cui si deduce che se gli autovalori di $D^2 f(p_0)$ sono tutti positivi (risp. negativi) allora p_0 è un punto di minimo (risp. massimo) locale per f. Se vi sono autovalori di segno discorde, p_0 è detto un punto di sella. Se qualche autovalore di $D^2 f(p_0)$ risulta nullo (e gli altri non sono di segno discorde), allora il solo sviluppo di Taylor al secondo ordine non permette di decidere sulla natura del punto critico.

Alcune regole per la determinazione dei segni degli autovalori della matrice Hessiana: nel caso $n = 2$ si studia il segno di traccia e determinante. Più in generale ci si può avvalere della regola dei segni di Cartesio per le radici del polinomio caratteristico: se tutti i segni dei coefficienti sono concordi allora non vi sono radici positive, mentre se tutti i coefficienti sono a segno alterno non vi possono essere radici negative. Esempi nei casi $n = 2, 3$.

Massimi e minimi di funzioni su domini $D \subset \mathbb{R}^n$ chiusi e limitati: vanno ricercati tra i punti critici interni a D e tra i massimi e minimi vincolati alla frontiera (o bordo) ∂D. Espressione del vincolo in forma parametrica. Risoluzione di problemi di massimo e minimo vincolato quando il vincolo è espresso in forma parametrica.

Lezione del 5/11/12 (2 ore). Risoluzione di problemi di massimo e minimo vincolato quando il vincolo è espresso in forma implicita (ovvero come insieme di livello di una funzione data). Introduzione al metodo dei moltiplicatori di Lagrange: nei punti di estremo vincolato il gradiente è ortogonale al vincolo, e quindi risulta essere parallelo (ovvero proporzionale) al gradiente della funzione attraverso cui si esprime il vincolo. Alcune applicazioni:

Caratterizzazione dei massimi e minimi vincolati di una forma quadratica sulla sfera unitaria di $\mathbb{R}^n$. Per $p = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$, A matrice simmetrica $n \times n$, sia data la forma quadratica

$$Q(p) = p^t \cdot A \cdot p = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j .$$

Si osservi che $Q(\lambda p) = \lambda^2 Q(p)$ per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$ (ovvero Q è una funzione omogenea di grado 2). Calcoliamone il gradiente: si ha

$$\frac{\partial Q}{\partial x_k}(p) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial}{\partial x_k}(x_i x_j) = \sum_{\ell=1}^{n} (a_{k\ell} + a_{\ell k}) x_\ell ,$$

da cui si deduce $\nabla Q(p) = (A + A^t) \cdot p = 2A \cdot p$, essendo $A + A^t = 2A$. In particolare $\nabla Q(p) = 0$ se e solo se $p \in \ker A$.

Consideriamo il problema di massimo (risp. minimo) vincolato

$$\max_{|p|=1} Q(p) , \qquad \min_{|p|=1} Q(p) .$$

Il vincolo può essere espresso dall'equazione $g(p) = 0$, con $g(p) = |p|^2 - 1 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 1$. Impostando il problema con i moltiplicatori di Lagrange, siamo condotti a risolvere il sistema

$$\nabla Q(p) = \lambda \cdot \nabla g(p) , \qquad g(p) = 0 ,$$

ovvero, dato che $\frac{\partial g}{\partial x_k}(p) = 2x_k$,

$$2A \cdot p = 2\lambda p , \qquad |p|^2 = 1 .$$

Pertanto i punti di estremo vincolato (tra cui il massimo ed il minimo) sono gli autovettori unitari di A. Osservando che, se p è un autovettore unitario, vale

$$Q(p) = p^t \cdot A \cdot p = p^t \cdot (\lambda \cdot p) = \lambda < p, p >= \lambda,$$

si ha che i valori estremi corrispondono agli autovalori di A. In particolare il massimo ed il minimo autovalore realizzano rispettivamente il massimo ed il minimo di Q sull'insieme $\{|p| = 1\}$.

Utilizzando questa caratterizzazione di autovettori unitari e autovalori di una matrice simmetrica si può dimostrarne ad esempio la diagonalizzabilità costruendo una base ortonormale di autovettori.

Un esempio di programmazione lineare in tre variabili (cfr. *metodo del simplesso*): sia da massimizzare (minimizzare) la funzione $f(x_1, x_2, x_3) = \sum_{i=1}^{3} a_i x_i \ + b$ sotto le condizioni $r_k(x_1, x_2, x_3) \leq 0$, con $r_k(x_1, x_2, x_3) = \sum_{i=1}^{3} c_{ik} x_i + d_k$, per $k = 1, ..., N$. Il vincolo imposto ad f rappresenta l'intersezione di N semispazi, ovvero un insieme *convesso* (ossia, per ogni coppia di punti dell'insieme, il segmento che li unisce è interamente contenuto nell'insieme) a frontiera *poliedrale*. Non essendoci punti critici interni poichè $\nabla f = (a_1, a_2, a_3) \neq (0, 0, 0)$, il massimo ed il minimo sono assunti alla frontiera poliedrale, ed in generale nei vertici del poliedro: infatti, per dati generici si ha che i vettori (c_{1k}, c_{2k}, c_{3k}), che rappresentano le normali alle facce del poliedro, non saranno paralleli a $(a_1, a_2, a_3) = \nabla f$, e quindi la funzione ristretta ad ogni faccia assumerà necessariamente massimo e minimo sugli spigoli. D'altra parte, ∇f non sarà (in generale) ortogonale agli spigoli, per cui il massimo e minimo della funzione ristretta a ciascun spigolo verrà assunto nei vertici.

Lezione dell'8/11/12 (1 ora). Programmazione non lineare: dato $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+k}$, se si deve ottimizzare $f \in C^1(\Omega;\mathbb{R})$ ristretta ai vincoli $G_1(p) \le 0$,..., $G_k(p) \le 0$, dove $p = (x_1, ..., x_{n+k}) \in \Omega$ e $G_1, ..., G_k \in C^1$, l'estremo vincolato $p_0 = (x_1^0, ..., x_{n+k}^0) \in \Omega$ risulta essere, sotto certe ipotesi sui vincoli, un punto critico (libero) della funzione (lagrangiana) ausiliaria

$$\Psi(x_1, ..., x_{n+k}, \lambda_1, ..., \lambda_k, u_1, ..., u_k) = f(p) - \sum_{i=1}^{k} \lambda_i (G_i(x_1, ..., x_{n+k}) + u_i^2)\,.$$

Il sistema corrispondente $\nabla\Psi = 0$ è detto sistema delle condizioni di Kuhn-Tucker:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x_1}(p_0) = \sum_{i=1}^k \lambda_i \frac{\partial G_i(p_0)}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_{n+k}}(p_0) = \sum_{i=1}^k \lambda_i \frac{\partial G_i(p_0)}{\partial x_{n+k}} \\ G_1(p_0) = -u_1^2 \\ \vdots \\ G_k(p_0) = -u_k^2 \\ \lambda_1 u_1 = 0 \\ \vdots \\ \lambda_k u_k = 0\,. \end{cases}$$

Le ipotesi cui devono soddisfare i vincoli discendono dal Teorema delle funzioni implicite.

Lezione del 9/11/12 (3 ore). Il teorema del Dini delle funzioni implicite. Enunciato nel caso di due variabili: se $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ e $g : \Omega \to \mathbb{R}$ è di classe $C^1(\Omega)$, $p_0 \equiv (x_0, y_0) \in g^{-1}(0)$ e $\frac{\partial g}{\partial y}(p_0) \neq 0$, allora esistono $\delta, \sigma > 0$, ed un intorno $R = [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \times [y_0 - \sigma, y_0 + \sigma]$ tale che $g^{-1}(0) \cap R = \{(x, y) \in R,\ y = \phi(x)\}$, dove $\phi : [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \to \mathbb{R}$ è una funzione di classe C^1. Si ha inoltre la formula

$$\phi'(x) = -\frac{\frac{\partial G}{\partial x}(x, \phi(x))}{\frac{\partial G}{\partial y}(x, \phi(x))}\,.$$

Il teorema del Dini dà delle condizioni affinchè l'insieme di livello $g^{-1}(0)$ possa rappresentarsi, localmente, come grafico di una opportuna funzione $y = \phi(x)$, la quale risulta definita implicitamente dall'equazione $g(x, y) = 0$, e le cui derivate possono essere calcolate derivando implicitamente rispetto a x la relazione $g(x, \phi(x)) = 0$. In particolare ϕ può essere calcolata approssimandola mediante sviluppi di Taylor.

Dimostrazione del teorema delle funzioni implicite nel caso di due variabili. Supponendo $\frac{\partial G}{\partial y}(x_0, y_0) > 0$, esiste $\sigma > 0$ tale che $\frac{\partial G}{\partial y}(x, y) > 0$ per $x_0 - \sigma \le x \le x_0 + \sigma$ e $y_0 - \sigma \le y \le y_0 + \sigma$. Possiamo anche supporre senza perdita di generalità che

$$\min\left\{\frac{\partial G}{\partial y}(x, y),\ x_0 - \sigma \le x \le x_0 + \sigma\,,\ y_0 - \sigma \le y \le y_0 + \sigma\right\} = \ell > 0\,.$$

In particolare, la funzione $t \mapsto G(x_0, t)$ è strettamente crescente per $y_0 - \sigma \le t \le y_0 + \sigma$, e dunque vale $G(x_0, y_0 - \sigma) < 0$ e $G(x_0, y_0 + \sigma) > 0$. Per la continuità di G esiste $0 < \delta < \sigma$ tale che $G(x, y_0 - \sigma) < 0$ e $G(x, y_0 + \sigma) > 0$ per ogni $x_0 - \delta \le x \le x_0 + \delta$. Per ogni $x_0 - \delta \le x \le x_0 + \delta$, la stretta monotonia della funzione $t \mapsto G(x, t)$ implica che esiste un unico punto $y \equiv \phi(x) \in [y_0 - \sigma, y_0 + \sigma]$ tale che $G(x, y) = G(x, \phi(x)) = 0$. Verifichiamo che la funzione implicita ϕ sia di classe C^1: siano x e $x+h$ in $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$, consideriamo la restrizione di G al segmento di estremi $p = (x, \phi(x))$ e $q = (x + h, \phi(x + h))$, ovvero la funzione

$$f(t) = G(p + t(q - p)) = G(x + th, \phi(x) + t[\phi(x + h) - \phi(x)])\,, \qquad 0 \le t \le 1\,.$$

Per il teorema di Lagrange del valor medio, si ha, per un certo $0 < \tau < 1$,

$$f(1) - f(0) = f'(\tau) = \frac{\partial G}{\partial x}(p_\tau) \cdot h + \frac{\partial G}{\partial y}(p_\tau) \cdot [\phi(x + h) - \phi(x)]\,,$$

dove $p_\tau = p + \tau(q - p)$. Essendo $f(1) = f(0) = 0$, si ottiene in particolare

$$\phi(x + h) - \phi(x) = -\frac{\frac{\partial G}{\partial x}(p_\tau)}{\frac{\partial G}{\partial y}(p_\tau)} h\,.$$

Dalla relazione precedente si ricava, dato che $p_\tau \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \times [y_0 - \sigma, y_0 + \sigma]$,

$$|\phi(x + h) - \phi(x)| \le h \frac{M}{\ell}\,,$$

dove

$$M = \max\left\{\frac{\partial G}{\partial x}(x, y),\ x_0 - \delta \le x \le x_0 + \delta,\ y_0 - \sigma \le y \le y_0 + \sigma\right\}\,.$$

Facendo tendere h a zero, si ottiene così la continuità di ϕ per ogni $x_0 - \delta \le x \le x_0 + \delta$.

Ora, stabilito che ϕ è continua, si può dedurre che per $h \to 0$ il punto $p_\tau = (x + \tau h, \phi(x) + \tau[\phi(x + h) - \phi(x)])$ tende effettivamente a $p = (x, \phi(x))$, da cui, passando al limite per $h \to 0$ nella relazione

$$\frac{\phi(x + h) - \phi(x)}{h} = -\frac{\frac{\partial G}{\partial x}(p_\tau)}{\frac{\partial G}{\partial y}(p_\tau)}\,,$$

si ottiene che ϕ è derivabile e vale la formula

$$\phi'(x) = -\frac{\frac{\partial G}{\partial x}(x, \phi(x))}{\frac{\partial G}{\partial y}(x, \phi(x))}.$$

D'altra parte, il secondo membro della precedente relazione è costituito dalla composizione di funzioni continue, pertanto è continuo. Si deduce pertanto che ϕ è in realtà di classe C^1. $\square$

Enunciato del teorema dei moltiplicatori di Lagrange (due variabili): se $f, g \in C^1(\Omega; \mathbb{R})$, e $p_0 \in g^{-1}(0) \cap \Omega$ è tale che $\nabla g(p_0) \neq 0$, allora p_0 è un punto di estremo vincolato per f ristretta a $g^{-1}(0)$ se e solo se esiste $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che $\nabla f(p_0) = \lambda \cdot \nabla g(p_0)$. Ciò equivale a dire che $(p_0, \lambda) \in \Omega \times \mathbb{R}$ è punto critico della funzione (di Lagrange) $\psi : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $\psi(p, \mu) = f(p) - \mu \cdot g(p)$.

Dimostrazione del teorema dei moltiplicatori di Lagrange (due variabili): se $\nabla g(p_0) \neq 0$ allora almeno una delle sue componenti non è nulla. Supponiamo per semplicità che sia $\frac{\partial g}{\partial y}(p_0) \neq 0$. Per il Teorema del Dini, si ha intorno a p_0 $g(x, y) = 0 \Leftrightarrow y = \phi(x)$, per cui , se p_0 è un estremo vincolato di f, si ha, posto $\tau = (1, \phi'(x_0))$,

$$0 = \frac{\partial f}{\partial x}(x, \phi(x))\bigg|_{p_0} = \langle \nabla f(p_0), \tau \rangle \quad \Leftrightarrow \quad \nabla f(p_0) = \lambda \cdot \nabla g(p_0)$$

per un certo $\lambda \in \mathbb{R}$: infatti, dato che anche $\langle \nabla g(p_0), \tau \rangle = 0$ (τ è tangente al vincolo), l'insieme $\{\nabla g(p_0), \tau\}$ forma una base ortogonale di $\mathbb{R}^2$, e quindi, posto $\lambda = \frac{\langle \nabla f(p_0), \nabla g(p_0) \rangle}{|\nabla g(p_0)|^2}$, si ha necessariamente $\nabla f(p_0) = \lambda \cdot \nabla g(p_0)$.

$\square$

Il teorema del Dini delle funzioni implicite (caso generale): sia $G : A \subset \mathbb{R}^{n+k} \to \mathbb{R}^k$ una funzione di classe C^1 nelle variabili $(x, y) \equiv (x_1, .., x_n, y_1, ..., y_k) \in \mathbb{R}^{n+k}$, e sia $(x_0, y_0) \in A$ tale che $G(x_0, y_0) = 0$ e $\det \frac{\partial\{G_1, ..., G_k\}}{\partial\{y_1, ..., y_k\}} \neq 0$. Allora $\exists\ \delta, \sigma > 0$, ed esiste $\phi : B_\delta(x_0) \subset \mathbb{R}^n \to B_\sigma(y_0) \subset \mathbb{R}^k$ tali che $G^{-1}(0) \cap (B_\delta(x_0) \times B_\sigma(y_0)) = \{(x, y) :\ x \in B_\delta(x_0)\,,\ y = \phi(x)\}$. Inoltre, ϕ è di classe C^1 e vale

$$D\phi(x) = -\left[\frac{\partial\{G_1, ..., G_k\}}{\partial\{y_1, ..., y_k\}}\right]^{-1} \cdot \left[\frac{\partial\{G_1, ..., G_k\}}{\partial\{x_1, ..., x_n\}}\right]\Bigg|_{y=\phi(x)},$$

ovvero vale la formula di derivazione implicita

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\left(G_i(x, \phi(x))\right) = \frac{\partial G_i}{\partial x_j}(x, \phi(x)) + \sum_{\ell=1}^{m} \frac{\partial G_i}{\partial y_\ell}(x, \phi(x)) \frac{\partial \phi_\ell}{\partial x_j}(x).$$

Nel caso G sia lineare, il teorema delle funzioni implicite si riduce al teorema di Rouché-Capelli. Alcune applicazioni del teorema delle funzioni implicite: descrizione delle soluzioni di sistemi di equazioni non lineari, esistenza e unicità per equazioni differenziali esatte, teorema dei moltiplicatori di Lagrange nel caso di k vincoli: sia $G = (G_1, ..., G_k) : A \subset \mathbb{R}^{n+k} \to \mathbb{R}^k$ di classe C^1, a sia $f \in C^1(A;\mathbb{R})$. Se $p_0 \in G^{-1}(0)$ è un estremo vincolato per f ristretta a $G^{-1}(0)$ e se $DG(p_0)$ ha rango massimo k, allora $\exists\ \lambda_1, ..., \lambda_k \in \mathbb{R}$ tali che $\nabla f(p_0) = \lambda_1 \nabla G_1(p_0) + ... + \lambda_k \nabla G_k(p_0)$.

Lezione del 12/11/12 (2 ore). Teorema della funzione inversa: se $g : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ è di classe C^1 e se $\det Dg(p_0) \neq 0$ (ovvero $\exists\ [Dg(p_0)]^{-1}$), allora $\exists\ U \subset D$ intorno di p_0 e $V \subset \mathbb{R}^n$ intorno di $q_0 = g(p_0)$ tale che $g : U \to V$ è invertibile. Inoltre, l'inversa g^{-1} è di classe C^1 (si dice che g è un diffeomorfismo locale), e $[Dg^{-1}(q_0)] = [Dg(p_0)]^{-1}$.

Tale risultato dà condizioni sufficienti per la risolubilità di sistemi non lineari di n equazioni in n incognite.

Esempio: la trasformazione in coordinate polari $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ verifica $\det\frac{\partial\{x,y\}}{\partial\{r,\theta\}} = r \neq 0\ \forall\, r > 0,\ \forall\, \theta \in \mathbb{R}$. Tale trasformazione è dunque un diffeomorfismo locale. Si osservi che la trasformazione non è globalmente invertibile, in quanto (r, θ) ed $(r, \theta + 2k\pi)$ hanno la stessa immagine $\forall\, k \in \mathbb{Z}$.

Norma *vettoriale* di una matrice: data A una matrice $n \times k$ si pone

$$|||A||| = \sup\{|A \cdot v|\,,\quad v \in \mathbb{R}^n,\ |v| \leq 1\} = \left(\sup_{|v|\leq 1} v^t \cdot A^t A \cdot v\right)^{1/2} = \sqrt{\lambda_{max}}\,,$$

con λ_{max} il massimo autovalore della matrice simmetrica semidefinita positiva $A^t A$.

Si ha, per definizione, $|Av| \leq |||A||| \cdot |v|\ \forall\ v \in \mathbb{R}^n$. Inoltre, tale norma è compatibile con il prodotto di matrici: $|||A \cdot B||| \leq |||A||| \cdot |||B|||$.

Formula degli accrescimenti finiti: si tratta di una versione del teorema del valor medio per funzioni vettoriali. Data $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ di classe C^1 e $p_1, p_2 \in D$ tali che il segmento $[p_1, p_2] = \{p_1 + t(p_2 - p_1),\ 0 \leq t \leq 1\} \subset D$, si ha

$$|f(p_2) - f(p_1)| \leq \left(\sup_{[p_1,p_2]} |||Df|||\right) \cdot |p_2 - p_1|\,.$$

Infatti, per il teorema fondamentale del calcolo applicato a $t \mapsto f(p_1 + t(p_2 - p_1))$ si ha

$$\begin{aligned}
|f(p_2) - f(p_1)| &= \left|\int_0^1 \frac{d}{dt} f(p_1 + t(p_2 - p_1))dt\right| = \left|\int_0^1 [Df(p_1 + t(p_2 - p_1)] \cdot (p_2 - p_1)dt\right| \\
&\leq \int_0^1 |\, Df(p_1 + t(p_2 - p_1)) \cdot (p_2 - p_1)\,| dt \\
&\leq \int_0^1 |||Df(p_1 + t(p_2 - p_1))||| \cdot |p_2 - p_1|\, dt \\
&\leq \int_0^1 \sup_{0\leq t\leq 1} |||Df(p_1 + t(p_2 - p_1))||| \cdot |p_2 - p_1|\, dt \\
&= \sup_{[p_1,p_2]} |||Df(p_1 + t(p_2 - p_1))||| \cdot |p_2 - p_1|.
\end{aligned}$$

Dimostrazione del Teorema della funzione inversa: sia $q \in B_s(q_0)$, e si consideri lo schema di tipo Newton $p_{n+1} = f(p_n)$, con

$$f(p) = p + [Dg(p_0)]^{-1}(q - g(p)) .$$

Si ha $p = f(p)$, ossia p è punto fisso di f, se e solo se $q = g(p)$. In altre parole, se il punto fisso p esiste ed è unico, allora $p = g^{-1}(q)$ è l'unica l'immagine inversa di q secondo g, ossia g è invertibile.

Dimostriamo che f è una contrazione se p è sufficientemente vicino a p_0, in modo da garantire esistenza e unicità del punto fisso di f, ovvero l'invertibilità locale di g intorno a p_0. Siano $p_1, p_2 \in B_r(p_0)$. Per la formula degli accrescimenti finiti si ha

$$|f(p_2) - f(p_1)| \leq \sup_{B_r(p_0)} |||Df||| \cdot |p_2 - p_1| \quad \forall\, p_1, p_2 \in B_r(p_0).$$

Ora calcoliamo $Df(p)$ per ogni $p \in B_r(p_0)$, e dimostriamo che si ha $|||Df(p)||| \leq \frac{1}{2}$ per ogni $p \in B_r(p_0)$ a patto di scegliere r sufficientemente piccolo (in particolare f è una contrazione). Si ha

$$Df(p) = I - [Dg(p_0)]^{-1}[Dg(p)] = [Dg(p_0)]^{-1} \cdot [Dg(p_0) - Dg(p)] ,$$

da cui

$$|||Df(p)||| = |||\, [Dg(p_0)]^{-1} \cdot [Dg(p_0) - Dg(p)] \,||| \leq |||Dg(p_0)^{-1}||| \cdot |||Dg(p_0) - Dg(p)||| ,$$

e dato che g è di classe C^1 si ha che per $p \to p_0$ vale $|||Dg(p_0) - Dg(p)||| \to 0$ (continuità di Dg in p_0), da cui discende che $|||Df(p)|||$ può essere reso piccolo a piacere per p sufficientemente vicino a p_0.

Mostriamo ora che per q sufficientemente vicino a q_0 (ovvero per s sufficientemente piccolo) si ha che f è una contrazione di $X = \overline{B(p_0, r)}$ in sè ($X \subset \mathbb{R}^n$ è completo in quanto sottoinsieme chiuso dello spazio metrico completo $\mathbb{R}^n$), ossia mostriamo che $|p - p_0| \leq r \Rightarrow |f(p) - p_0| \leq r$. In effetti si ha

$$|f(p) - p_0| \leq |f(p) - f(p_0)| + |f(p_0) - p_0| \leq \frac{1}{2}|p - p_0| + |||Dg(p_0)^{-1}||| \cdot |q - q_0| \leq r$$

a patto di scegliere s in modo che $|||Dg(p_0)^{-1}||| \cdot |q - q_0| \leq |||Dg(p_0)^{-1}||| \cdot s \leq r/2$. Fissati dunque in tal modo s ed r, e ponendo $V = B_s(q_0)$ ed $U = g^{-1}(B_s(q_0)) \cap B(p_0, r)$, si ha che $g|_U$, la funzione g ristretta ad U, è invertibile, e si può dimostrare inoltre che la funzione inversa $(g|_U)^{-1}$ è differenziabile, e di classe C^1, in altre parole $g|_U$ è un diffeomorfismo di U su V. La formula per il differenziale della funzione inversa segue ad esempio derivando la relazione $(g|_U)^{-1} \circ (g|_U) = I$.

Lezione del 15/11/12 (1 ora). Integrali doppi e tripli per funzioni continue definite su un prodotto di intervalli. Teorema di Fubini-Tonelli (formula dell'integrale iterato). Estensione al caso di domini normali rispetto agli assi coordinati: nel caso degli integrali doppi, se ad esempio $h_1, h_2 \in C^0([a,b];\mathbb{R})$ e $D = \{(x,y),\ a \le x \le b\,,\ h_1(x) \le y \le h_2(x)\}$, ed inoltre $f \in C^0(D;\mathbb{R})$, si ha

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \left[\int_{h_1(x)}^{h_2(x)} f(x,y)\,dy\right] dx\,.$$

Nel caso degli integrali tripli, se esistono funzioni continue $g_1(x,y)$ e $g_2(x,y)$ ed $h_1(x)$ e $h_2(x)$ tali che $D = \{(x,y,z),\ a \le x \le b\,,\ h_1(x) \le y \le g_2(x)\,,\ g_1(x,y) \le z \le g_2(x,y)\}$, ed $f \in C^0(D;\mathbb{R})$, allora si ha

$$\iiint\limits_D f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_a^b \left[\int_{h_1(x)}^{h_2(x)} \left[\int_{g_1(x,y)}^{g_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz\right] dy\right] dx\,.$$

Calcolo di aree e volumi. Per $D \subset \mathbb{R}^2$ si ha Area$(D) = \iint_D dx\,dy$. Per $D \subset \mathbb{R}^3$ si ha Volume$(D) = \iiint_D dx\,dy\,dz$.

Lezione del 16/11/12 (3 ore). Formula di cambiamento di variabile negli integrali multipli: se $T : R \subset \mathbb{R}^n \to D = T(R) \subset \mathbb{R}^n$, è di classe C^1 ed iniettiva tranne al più sui punti della frontiera ∂R del dominio, allora, per $f \in C^0(D;\mathbb{R})$, posto $x = (x_1, ...x_n) = T(u_1, ..., u_n) = T(u)$, vale la formula

$$\int_D f(x)\,dx_1...dx_n = \int_R f(T(u)) \left|\det \frac{\partial\{T_1, ..., T_n\}}{\partial\{u_1, ..., u_n\}}(u)\right| du_1...du_n\,.$$

Uno dei passaggi chiave per ottenere la formula è l'espressione del volume del parallelepipedo n-dimensionale $P \subset \mathbb{R}^n$ generato da n vettori $v_j = (v_{1,j}, ...v_{n,j}) \in \mathbb{R}^n$, per $j = 1, ..., n$. Detta $A = [v_{i,j}]$ la matrice $n \times n$ le cui colonne sono date dai vettori v_j, si ha $\mathrm{vol}\,(P) = |\det A|$.

Idea della dimostrazione della formula di cambiamento di variabile: data una partizione di R in cubetti n-dimensionali generati dai vettori $\Delta u_1 \cdot e_1, ..., \Delta u_n \cdot e_n$, questa induce una partizione di D data dalle immagini dei cubetti, il cui volume n-dimensionale è approssimativamente dato dal volume del parallelepipedo generato da $dT(u)\cdot(\Delta u_1 \cdot e_1), ..., dT(u)\cdot(\Delta u_n \cdot e_n)$, ovvero dai vettori $\Delta u_1 \cdot \frac{\partial T}{\partial u_1}(u), ..., \Delta u_n \cdot \frac{\partial T}{\partial u_n}(u)$. Tale volume è dato da $|\det DT(u)|\Delta u_1...\Delta u_n$, e quindi la somma di Riemann di f su D si può esprimere come $\sum f(T(u))|\det DT(u)|\Delta u_1...\Delta u_n$, che converge al secondo membro della formula di cambiamento di variabili.

Calcolo di integrali multipli utilizzando trasformazioni di coordinate polari, sferiche e cilindriche. Volume della sfera, area dell'ellisse. Momenti primi e secondi di una distribuzione di massa/probabilità. Formula per il baricentro di figure piane o solide. Dato un solido che occupa una regione di spazio $D \subset \mathbb{R}^3$ con densità $\rho(x,y,z)$, le coordinate $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ del baricentro sono date dalla media pesata

$$\bar{x} = \frac{\iiint_D x\,\rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz}{\iiint_D \rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz},$$
$$\bar{y} = \frac{\iiint_D y\,\rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz}{\iiint_D \rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz},$$
$$\bar{z} = \frac{\iiint_D z\,\rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz}{\iiint_D \rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz}.$$

Teorema di Pappo-Guldino per il volume dei solidi di rivoluzione. Calcolo di $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx$. Posto $f(x,y) = e^{-x^2} e^{-y^2}$, si ha

$$\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2} e^{-y^2}\,dxdy = \lim_{R\to+\infty} \int_{-R}^{R} e^{-y^2} \left[\int_{-R}^{R} e^{-x^2}\,dx\right] dy = \left[\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx\right]^2 .$$

D'altra parte, trasformando in coordinate polari, si ha

$$\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)}\,dxdy = \lim_{R\to+\infty} \int_0^R \left[\int_0^{2\pi} e^{-r^2} r\,d\theta\right] dr = \pi\,,$$

da cui la formula $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$.

Lezione del 21/11/12 (2 ore). Integrali curvilinei di prima specie. Data una funzione continua $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ed una curva parametrizzata $\gamma : [a,b] \to D$ di classe C^1 e iniettiva tranne al più agli estremi (ovvero una curva *semplice*), detto $\Gamma = \{\gamma(t)\,,\ a \le t \le b\}$ il suo sostegno, si definisce l'integrale curvilineo (di prima specie) di f lungo Γ come segue:

$$\int_\Gamma f\,ds := \int_a^b f(\gamma(t))|\dot\gamma(t)|dt = \int_a^b f(x_1(t),...,x_n(t))\sqrt{\sum_{i=1}^n \dot{x}_i^2}\,dt\,.$$

Proprietà: indipendenza dalla parametrizzazione, linearità rispetto all'integrando f, additività rispetto alla curva Γ (ossia, se $\Gamma = \cup_i \Gamma_i$ con $\Gamma_i = \{\gamma_i(t)\,,\ a_i \le t \le b_i\}$, γ_i di classe C^1 e iniettiva, $\gamma_{i-1}(b_{i-1}) = \gamma_i(a_i)$ per ogni i, si ha $\int_\Gamma f ds = \sum_i \int_{\Gamma_i} f ds$).

L'integrale curvilineo di prima specie è un integrale non orientato, e si utilizza per il calcolo di lunghezze di curve (caso $f \equiv 1$), masse di oggetti filiformi (se f rappresenta la densità lineare dell'oggetto) o baricentri e/o momenti d'inerzia (rispettivamente nel caso $f(x_1,...,x_n) = x_i$, o f rappresenti la distanza al quadrato da un asse, come ad esempio $f(x,y,z) = x^2 + y^2$, la distanza al quadrato dall'asse z).

Nel caso Γ sia immagine di una parametrizzazione $\gamma \in C^0([a,b])$ (iniettiva trane al più agli estremi), si dà la seguente nozione di lunghezza:

$$L(\Gamma) = \sup \left\{ \sum_{i=1}^{N} |P_i - P_{i-1}|, \quad P_i = \gamma(t_i)\,, a = t_0 < t_1 < ... < t_N = b \right\}.$$

Se $L(\Gamma) < +\infty$ si dice che la curva è *rettificabile*.

Integrali superficiali di prima specie. Data una funzione $f : D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ di classe C^1 ed una superficie $S = \{\vec{r}(u,v),\ (u,v) \in R \subset \mathbb{R}^2\} \subset D$ definita mediante una parametrizzazione di classe C^1 iniettiva tranne al più sul bordo ∂D, si definisce l'integrale superficiale di f su S come segue:

$$\iint_S f\,da := \iint_R f(\vec{r}(u,v)) \left| \frac{\partial r}{\partial u} \times \frac{\partial r}{\partial v} \right| dudv = \iint_R f(\vec{r}(u,v)) \sqrt{\det([D\vec{r}]^t \cdot [D\vec{r}])}\, dudv\,.$$

Proprietà: invarianza rispetto alla parametrizzazione, linearità, additività. Formula per l'area di superfici cartesiane.

Lezione del 22/11/12 (1 ora). Calcolo di masse, baricentri, momenti d'inerzia di figure bidimensionali.

Integrale curvilineo (detto di seconda specie, o orientato) per campi vettoriali su curve orientate: se $F : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ è un campo di vettori continuo e $\Gamma \subset D$ è una curva orientata di primo estremo A e secondo estremo B, parametrizzata mediante $\gamma : [a,b] \to D$, con $\gamma(a) = A$ e $\gamma(b) = B$, di classe C^1 iniettiva tranne al più agli estremi, si pone

$$\int_\Gamma F \cdot ds \equiv \int_\Gamma < F, \tau > ds := \int_a^b < F(\gamma(t)), \dot{\gamma}(t) > dt\,.$$

Notazione con le 1-forme differenziali (per semplicità, consideriamo il caso $n = 3$): se $F(x,y,z) = (F_1(x,y,z), F_2(x,y,z), F_3(x,y,z))$ e $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$, si pone

$$\begin{aligned}\int_\Gamma F \cdot ds &\equiv \int_\Gamma F_1(x,y,z)dx + F_2(x,y,z)dy + F_3(x,y,z)dz := \\ &= \int_a^b F_1(x(t),y(t),z(t))\dot{x}(t) + F_2(x(t),y(t),z(t))\dot{y}(t) + F_3(x(t),y(t),z(t))\dot{z}(t)\,dt\,.\end{aligned}$$

L'applicazione $(x,y,z) \mapsto F_1(x,y,z)dx + F_2(x,y,z)dy + F_3(x,y,z)dz$ si dice 1-forma differenziale.

Proprietà dell'integrale curvilineo di seconda specie: indipendenza dalla parametrizzazione (a meno dell'orientazione (indotta dalla parametrizzazione) di Γ), linearità, additività. Dipendenza dall'orientazione di Γ dell'integrale curvilineo: se indichiamo con Γ_{AB} la curva Γ orientata con primo estremo A e secondo estremo B e Γ_{BA} la stessa curva in cui si considera B come primo estremo ed A come secondo estremo, si ha

$$\int_{\Gamma_{BA}} F \cdot ds = -\int_{\Gamma_{AB}} F \cdot ds\,.$$

Teorema fondamentale del calcolo per gli integrali curvilinei di seconda specie: se F è un *campo conservativo*, ovvero se $F = \nabla\phi$, cioè F è il gradiente di una funzione (detta *potenziale scalare*) ϕ, si ha

$$\int_{\Gamma_{AB}} \nabla\phi \cdot ds = \int_a^b \langle \nabla\phi(\gamma(t), \gamma'(t)\rangle \, dt = \int_a^b \frac{d}{dt}\left(\phi(\gamma(t))\right) \, dt = \phi(B) - \phi(A) \, .$$

Nel formalismo delle forme differenziali si ha

$$\int_{\Gamma_{AB}} \frac{\partial\phi}{\partial x_1} dx_1 + ... + \frac{\partial\phi}{\partial x_n} dx_n = \int_{\Gamma_{AB}} d\phi = \phi(B) - \phi(A).$$

In particolare, l'integrale curvilineo di un campo conservativo dipende solamente dagli estremi della curva Γ, e dunque non cambia se calcolato lungo una qualsiasi altra curva che congiunga A a B.

Lezione del 23/11/12 (3 ore). Esempi di campi conservativi: il campo elettrostatico/gravitazionale generato da una carica/massa puntiforme posta nell'origine, dato da $\vec{F}(x,y,z) = \pm C \frac{(x,y,z)}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$ è conservativo. Si ha $\vec{F} = \nabla\phi$, con $\phi(x,y,z) = \pm C \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$. Il campo di una forza di richiamo elastica $F(x,y,z) = -k(x,y,z)$ è conservativo: si ha $F = \nabla\phi$ con $\phi(x,y,z) = -\frac{k}{2}(x^2+y^2+z^2)$.

Condizioni equivalenti alla proprietà di essere conservativo su un dominio D per un campo di vettori di classe C^0: indipendenza (dell'integrale curvilineo) dalla traiettoria, circuitazione nulla. Determinazione di una funzione potenziale per un campo conservativo $F : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$: fissato $p_0 \in D$, si pone $\phi(p) = \int_{\Gamma_{p_0 p}} F \cdot ds$, dove, per $p \in D$, $\Gamma_{p_0 p}$ è una curva orientata che collega p_0 a p. La definizione è consistente, per l'indipendenza dalla traiettoria. Dimostriamo che ad esempio $\frac{\partial\phi}{\partial x}(p) = F_1(p)$, la prima componente di F: detto $S = \{p + te_1 \, , \; 0 \leq t \leq h\}$ il segmento che unisce p a $p + he_1$, si ha

$$\begin{aligned} \frac{\phi(p+he_1) - \phi(p)}{h} &= \frac{1}{h}\int_S F \cdot ds = \frac{1}{h}\int_0^h < F(p+te_1), e_1 > dt \\ &= \frac{1}{h}\int_0^h F_1(p+te_1) dt = F_1(p+\bar{t}e_1) \end{aligned}$$

per un certo $0 \leq \bar{t} \leq h$. La conclusione segue passando al limite per $h \to 0$, stante la continuità di F_1.

Metodi di calcolo del potenziale di un campo conservativo (in $\mathbb{R}^2$): dovendo essere, a y fissato, $\phi(x,y) = \int_{x_0}^x F_1(x,y)\, dx$, posto $G(x,y) = \int F_1(x,y)\, dx$ (integrale indefinito), si avrà $\phi(x,y) = G(x,y) + C(y)$, e $C(y)$ si ottiene risolvendo l'equazione differenziale $C'(y) = F_2(x,y) - \frac{\partial G(x,y)}{\partial y}$. Il potenziale risulta definito a meno di una costante.

Condizione necessaria affinché un campo F di classe C^1 sia conservativo in un dominio $A \subset \mathbb{R}^n$ è che la matrice Jacobiana DF sia una matrice simmetrica (infatti, se $F = \nabla\phi$ in A allora $DF = D^2\phi$, che è simmetrica per il teorema di Schwarz). In dimensione due e tre, tale condizione si traduce nella condizione sulle derivate incrociate

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} = \frac{\partial F_1}{\partial y}, \qquad \frac{\partial F_3}{\partial x} = \frac{\partial F_1}{\partial z}, \qquad \frac{\partial F_3}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial z}\,.$$

Nozione di insieme *semplicemente connesso* (viene qui data la definizione in $\mathbb{R}^2$): $A \subset \mathbb{R}^2$ è semplicemente connesso se per ogni $\Gamma \subset A$ curva semplice chiusa, si ha $\Gamma = \partial D$ con $D \subset A$ (Γ è il bordo di un dominio *interamente* contenuto in A).

Esempi di insiemi semplicemente connessi in $\mathbb{R}^n$: palle, insiemi convessi, insiemi stellati. In $\mathbb{R}^2$ sono semplicemente connessi gli insiemi connessi privi di "buchi". Esempi di insiemi non semplicemente connessi nel piano sono le corone circolari, o aperti connessi privati di un numero finito di punti.

La condizione DF simmetrica su un dominio A semplicemente connesso è sufficiente affinchè F sia conservativo in A. In particolare, se DF è simmetrica su un dominio A qualunque, dato che ogni palla è semplicemente connessa, si ha che F ammette *localmente* un potenziale (che può non essere globalmente ben definito su A se A non è semplicemetne connesso).

Dimostrazione della sufficienza della condizione nel caso di domini stellati nel piano (Lemma di Poincaré, *non svolto a lezione*) : sia $D \subset \mathbb{R}^2$ stellato rispetto all'origine, e sia $p = (x, y) \in D$. Definiamo $\phi(x, y) = \int_0^1 xF_1(tx, ty) + yF_2(tx, ty)\, dt$ (lavoro di F lungo il segmento di estremi $(0, 0)$ e (x, y)). Grazie al teorema di derivazione sotto il segno di integrale, valido per integrandi di classe C^1 e la condizione $\frac{\partial F_2}{\partial x} = \frac{\partial F_1}{\partial y}$ si ottiene

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\phi}{\partial x}(x, y) &= \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x}\left(xF_1(tx, ty) + yF_2(tx, ty)\right)\, dt \\
&= \int_0^1 F_1(tx, ty) + tx\frac{\partial F_1}{\partial x}(tx, ty) + ty\frac{\partial F_2}{\partial x}(tx, ty)\, dt \\
&= \int_0^1 F_1(tx, ty) + tx\frac{\partial F_1}{\partial x}(tx, ty) + ty\frac{\partial F_1}{\partial y}(tx, ty)\, dt \\
&= \int_0^1 \frac{d}{dt}\left(tF_1(tx, ty)\right)\, dt = F_1(x, y).
\end{aligned}$$

Analogamente si ottiene $\frac{\partial\phi}{\partial y}(x, y) = F_2(x, y)$. □

Definizione di rotore di un campo vettoriale in $\mathbb{R}^3$. Campi irrotazionali. Un campo conservativo in un dominio $A \subset \mathbb{R}^3$ è irrotazionale in A. Rotore di un campo vettoriale in $\mathbb{R}^2$. Esempio: il campo di velocità di rotazione attorno all'asse z è dato da $V = \vec{\Omega} \times \vec{r}$ dove $\vec{\Omega} = \Omega\, e_3$ rappresenta la velocità angolare e $\vec{r} = xe_1 + ye_2 = r\hat{\imath}_r$ esprime la componente orizzontale di $p = (x, y, z)$. Si ha $V = -\Omega ye_1 + \Omega xe_2 = \Omega r\hat{\imath}_\theta$, e $\operatorname{rot} V = 2\vec{\Omega}$.

Lezione del 26/11/12 (2 ore). Esempio fondamentale: il campo vettoriale

$$F(x, y) = \left(\frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2}\right) = \frac{1}{r}\hat{\imath}_\theta$$

è irrotazionale. Tuttavia non è conservativo su tutto il suo dominio di definizione, $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ (un insieme non semplicemente connesso), in quanto il suo integrale curvilineo lungo una circonferenza di centro l'origine è diverso da zero. Sul dominio $A = \mathbb{R}^2 \setminus \{y = 0,\ x \geq 0\}$, che è semplicemente connesso, si ha $F = \nabla\theta$, dove θ è la funzione angolare definita dalla funzione inversa della trasformazione in coordinate polari $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ ristretta a $(0, +\infty) \times (0, 2\pi)$.

Formule di Gauss-Green nel piano: sia $F = (F_1, F_2) : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ un campo vettoriale di classe C^1, sia $D \subset A$ un dominio tale che $\Gamma = \partial D$ sia una curva semplice chiusa di classe C^1 a tratti. Allora vale

$$\oint_\Gamma F_1 dx + F_2 dy = \iint_D \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dxdy\,,$$

dove Γ è orientata in senso antiorario. Applicazioni della formula di Gauss-Green: calcolo di aree di figure piane mediante integrazione sul loro contorno, calcolo di circuitazioni mediante integrali doppi.

Rivisitazione del Teorema di Gauss-Green nel piano alla luce degli integrali orientati: la formula si può scrivere

$$\int_{\partial D} \langle F, \tau \rangle d\ell = \iint_D \langle \mathrm{rot}\, F, n \rangle da\,,$$

dove il dominio D giace in un piano orizzontale di $\mathbb{R}^3$, è orientato dal versore normale diretto verso l'alto $n = e_3$, ed il bordo ∂D è una curva semplice di classe C^1 a tratti orientata in senso antiorario dal versore τ, ovvero n e τ soddisfano la regola della mano destra, con n facente le veci del pollice.

L'integrale a secondo membro è un un integrale orientato di superficie, ovvero un integrale di *flusso*: se $\mathrm{rot}\, F$ è il campo di velocità di un fluido avente densità unitaria, serve a misurare la quantità di fluido che passa attraverso D nell'unità di tempo.

In virtù dell'invarianza per isometrie di $\mathbb{R}^3$ di ambo i membri della formula precedente, quest'ultima si estende per additività al caso D superficie triangolata di $\mathbb{R}^3$, per passaggio al limite, al caso delle superfici di classe C^1. Più precisamente, vale il Teorema di Stokes: sia $S \subset \mathbb{R}^3$ una superfice con bordo ∂S, entrambi orientati da una parametrizzazione data $\vec{r} : R \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ di classe C^1, rango $D\vec{r}$ massimo e iniettiva sino al bordo ∂R, dove può risultare di classe C^1 a tratti. Allora si ha $\int_{\partial S} \langle F, \tau \rangle d\ell = \iint_S \langle \mathrm{rot}\, F, n \rangle da$ per ogni campo vettoriale F di classe C^1 definito in un intorno di S.

Lezione del 29/11/12 (1 ora). Dimostrazione del teorema di Gauss-Green nel caso di domini normali rispetto ad entrambi gli assi coordinati. Estensione per additività a domini piani più generali.

Integrali superficiali di seconda specie (o integrali di flusso): sia $F : A \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un campo vettoriale continuo, ed $S \subset A$ una superficie parametrizzata da $\vec{r}(u, v)$, di classe

C^1, $(u,v) \in R \subset \mathbb{R}^2$. Si definisce

$$\iint_S \langle F, n\rangle da := \iint_R \langle F(\vec{r}(u,v)), \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}(u,v)\rangle \, du dv \, .$$

Proprietà degli integrali orientati di superficie: a parità di orientazione n, indipendenza dalla parametrizzazione $\vec{r}$ (conseguenza della formula di cambiamento di variabili negli integrali doppi); linearità rispetto ad F, additività rispetto a S.

Notazione degli integrali di flusso con le forme differenziali: se $F = (F_1, F_2, F_3)$ e dx, dy, dz rappresentano i differenziali delle funzioni coordinate $p \equiv (x,y,z) \mapsto x$, $p \mapsto y$, $p \mapsto z$, si pone

$$\iint_S \langle F, n\rangle da = \iint_S F_1 dy \wedge dz + F_2 dz \wedge dx + F_3 dx \wedge dy \, ,$$

dove $\wedge$ definisce un prodotto *anticommutativo* (associativo, distributivo rispetto alla somma) tra forme differenziali con il quale si possono definire elementi d'area orientati: ad esempio $dx \wedge dy = -dy \wedge dx$ identifica un elemento d'area orientato su un piano orizzontale. Volendo leggere la formula precedente attraverso la parametrizzazione $\vec{r}(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$, dato che

$$dx(u,v) = \frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv, \quad dy(u,v) = \frac{\partial y}{\partial u} du + \frac{\partial y}{\partial v} dv, \quad dz(u,v) = \frac{\partial z}{\partial u} du + \frac{\partial z}{\partial v} dv,$$

si ha

$$dx(u,v) \wedge dy(u,v) = \left(\frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv\right) \wedge \left(\frac{\partial y}{\partial u} du + \frac{\partial y}{\partial v} dv\right) = \det \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} du \wedge dv,$$

e similmente

$$dz(u,v) \wedge dx(u,v) = \det \frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)} du \wedge dv, \qquad dy(u,v) \wedge dz(u,v) = \det \frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)} du \wedge dv \, .$$

si ottiene pertanto la formula

$$\iint_S F_1 dy \wedge dz + F_2 dz \wedge dx + F_3 dx \wedge dy = \iint_R \left[F_1 \det \frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)} + F_2 \det \frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)} + F_3 \det \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right] du \wedge dv,$$

che è consistente con la definizione di integrale di flusso, dato che vale

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} = \left(\det \frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}, \det \frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}, \det \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right) \, .$$

Lezione del 30/11/12 (3 ore). Data $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$ una curva semplice chiusa orientata, supponiamo $\Gamma = \partial S = \partial S'$ per due superfici S e S' orientate in modo da rispettare la regola della mano destra rispetto all'orientazione di Γ. Allora dal Teorema di Stokes si deduce che per ogni campo vettoriale A, $\iint_S \langle \mathrm{rot}\, A, n\rangle da = \iint_D \langle \mathrm{rot}\, A, n\rangle da$, ovvero il flusso di un rotore attraverso una superficie a bordo fissato è indipendente dalla superficie. Equivalentemente, se Σ è una superficie orientata chiusa, ovvero $\partial\Sigma = \emptyset$, si ha $\iint_\Sigma \langle \mathrm{rot}\, A, n\rangle da = 0$, ovvero il flusso di un rotore attraverso una superficie chiusa è nullo. Quindi i campi vettoriali F che sono rotori di altri campi vettoriali A (ossia $F = $rot A), giocano dal punto di vista degli integrali di superficie di seconda specie lo stesso ruolo che giocano i campi conservativi (ossia i gradienti) nel caso degli integrali curvilinei di seconda specie. Se $F = $rot A, il campo A viene detto potenziale vettore di F. L'esempio classico di un campo che ammette potenziale vettore è costituito dal campo magnetico $\vec{B}$, oppure dal campo di velocità di un fluido stazionario incomprimibile.

Divergenza di un campo vettoriale $F : \Omega \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$. Si tratta della quantità scalare $\mathrm{div}\, F = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}$. Una condizione necessaria affinchè un campo di classe C^1 sia un rotore è che abbia divergenza nulla, ovvero che sia solenoidale. Si ha cioè che $F = $rot A in un dominio $D \subset \mathbb{R}^3$ implica $\mathrm{div}\, F = 0$ su D. Tale risultato è conseguenza del teorema di Schwarz.

La condizione non è in generale sufficiente: si prenda ad esempio $F(p) = \frac{i_r}{r^2} = \frac{p}{|p|^3}$ il campo elettrostatico generato da una carica positiva puntiforme situata nell'origine di $\mathbb{R}^3$. Tale campo è solenoidale nel suo dominio di definizione $\mathbb{R}^3 \setminus (0,0,0)$, ma non è il rotore di alcun campo vettoriale definito sullo stesso dominio, in quanto detta Σ la superficie sferica di centro l'origine e raggio $R > 0$ (Σ è una superficie chiusa) orientata dal versore radiale $i_r = \frac{p}{|p|}$, si ha

$$\iint_\Sigma \langle F, n\rangle da = \iint_\Sigma \langle \frac{i_r}{R^2}, i_r\rangle da = \frac{1}{R^2}\int_\Sigma da = 4\pi \neq 0.$$

La condizione $\mathrm{div}\, F = 0$ risulta sufficiente affinchè sia $F = $rot A ad esempio su domini convessi (Lemma di Poincaré). In realtà detta implicazione è vera su domini D che verificano certe ipotesi meno stringenti (in buona sostanza, se per ogni superficie chiusa S in D, si ha $S = \partial V$ con V interamente contenuto in D).

Teorema della divergenza (o di Gauss): sia $V \subset \mathbb{R}^3$ un dominio con bordo ∂V costituito da una superficie chiusa di classe C^1 a tratti, orientata dalla normale esterna a V, e sia F un campo vettoriale di classe C^1 definito su un aperto $A \supset V$. Si ha

$$\iint_{\partial V} \langle F, n\rangle da = \iiint_V \mathrm{div}\, F \, dxdydz\,.$$

Dimostrazione nel caso di domini V normali rispetto a tutti e tre gli assi coordinati: dimostriamo ad esempio che la formula è vera nel caso $F = (0, 0, F_3)$. Il caso generale segue per linearità. Possiamo descrivere V in forma normale rispetto all'asse z, ovvero $V = \{(x, y) \in R,\ g_1(x, y) \leq z \leq g_2(x, y)\}$, con $R \subset \mathbb{R}^2$ un dominio regolare e

$g_i : R \to \mathbb{R}$ di classe C^1 per $i = 1, 2$. Si ha, da una parte,

$$\iiint \operatorname{div} F \, dxdydz = \iint_R dxdy \left[\int_{g_1(x,y)}^{g_2(x,y)} \frac{\partial F_3}{\partial z} \, dz \right]$$
$$= \iint_R \left[F_3(x, y, g_2(x, y)) - F_3(x, y, g_1(x, y)) \right] dxdy.$$

D'altro canto, $\partial V = \Gamma_{g_2} \cup \Gamma_{g_1} \cup \Sigma$ con $\Sigma \subset \partial R \times \mathbb{R}$ un'eventuale superficie laterale a normale orizzontale. In particolare, $\iint_\Sigma \langle F_3 e_3, n \rangle da = 0$. Tenuto conto delle orientazioni di Γ_{g_2} (normale verso l'alto) e Γ_{g_1} (normale verso il basso), si ha inoltre

$$\iint_{\Gamma_{g_2}} \langle F_3 e_3, n \rangle da = \iint_R \langle (0, 0, F_3(x, y, g_2(x, y)), (-\frac{\partial g_2}{\partial x}, -\frac{\partial g_2}{\partial y}, 1) \rangle \, dxdy$$
$$= \iint_R F_3(x, y, g_2(x, y)) \, dxdy \, ,$$

e

$$\iint_{\Gamma_{g_1}} \langle F_3 e_3, n \rangle da = \iint_R \langle (0, 0, F_3(x, y, g_1(x, y)), (\frac{\partial g_1}{\partial x}, \frac{\partial g_1}{\partial y}, -1) \rangle \, dxdy$$
$$= - \iint_R F_3(x, y, g_1(x, y)) \, dxdy \, .$$

La somma dei flussi è pertanto uguale all'integrale triplo della divergenza di F su V, come volevasi dimostrare. $\square$

Il teorema della divergenza in $\mathbb{R}^3$ è una generalizzazione del teorema fondamentale del calcolo, così come il teorema di Stokes per superfici in $\mathbb{R}^3$, o il teorema di Gauss-Green nel piano.

Applicazione del teorema della divergenza al calcolo di volumi: il campo $F(p) = p = (x, y, z)$ ha divergenza $\operatorname{div} F = 3$, e dunque, per una data regione V a frontiera regolare ∂V si ha $3 \; \operatorname{vol}(V) = \iint_{\partial V} \langle F, n \rangle \, da$.

Se il rotore di un campo vettoriale (interpretato come campo di velocità di un fluido) ne misura la "vorticità", la divergenza ne individua "sorgenti" e "pozzi". Un campo vettoriale su $\mathbb{R}^3$ è univocamente determinato conoscendo il valore di $\operatorname{div} F$ e $\operatorname{rot} F$. Decomposizione di Hodge (o Helmholtz) di un campo vettoriale F definito su $\mathbb{R}^3$: si ha $F = F_1 + F_2$ con F_1 irrotazionale e F_2 solenoidale, e la decomposizione è ortogonale rispetto al prodotto scalare di $L^2(\mathbb{R}^3)$.

Epilogo. Rivisitiamo la teoria precedente con il formalismo delle forme differenziali (in $\mathbb{R}^3$): dato un campo di vettori $F = (F_1, F_2, F_3)$, ad esso è associata la 1-forma $\omega = F_1(x, y, z)dx + F_2(x, y, z)dy + F_3(x, yz)dz$ (in coordinate, se F è un vettore colonna, ω è il vettore riga corrispondente a F^t. La forma ω si dice *esatta* se $\omega = d\phi$, ovvero se è il differenziale di una certa funzione scalare ϕ (se e solo se $F = \nabla \phi$). Ad un campo di vettori $V = (V_1, V_2, V_3)$ possiamo associare anche la 2-forma $\omega = V_1 dy \wedge dz + V_2 dz \wedge dx + V_3 dx \wedge dy$. Estendiamo alle 1-forme l'operatore d (differenziale esterno) come segue: per $\omega = F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz$ si pone $d\omega = dF_1 \wedge dx + dF_2 \wedge dy + dF_3 \wedge dz$. La 2-forma $d\omega$ è associata al campo di vettori $V = \operatorname{rot} F$. Analogamente, data la 2-forma $\omega = V_1 dy \wedge dz + V_2 dz \wedge dx + V_3 dx \wedge dy$ si avrà $d\omega = (\operatorname{div} V) dx \wedge dy \wedge dz$.

Se $d\omega = 0$ in un dominio D, si dice che ω è *chiusa* in D. Per il Teorema di Schwarz una forma esatta è chiusa, ovvero $d(d\omega) = 0$, mentre il viceversa è vero in generale solo localmente, o se D soddisfa ad alcune ipotesi topologiche (verificate ad esempio se D è una palla, o un insieme convesso o stellato).

Teorema di Stokes per forme: data una superficie k-dimensionale S in $\mathbb{R}^n$ orientata da una parametrizzazione $\vec{r} : R \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ di classe C^1, regolare (ovvero iniettiva e con $D\vec{r}$ di rango massimo) sino al bordo ∂R , ed una $(k-1)$-forma ω di classe C^1, si ha

$$\int_{\partial S} \omega = \int_S d\omega \,,$$

dove si intende che l'orientazione di ∂S è quella indotta dalla restrizione a ∂R della parametrizzazione $\vec{r}$. Il Teorema di Stokes costituisce una generalizzazione del teorema fondamentale del Calcolo per integrali su superfici k-dimensionali orientate in $\mathbb{R}^n$, e contiene come casi particolari il teorema della divergenza, il Teorema di Gauss-Green nel piano e la formula di Stokes in $\mathbb{R}^3$.