Foglio 11

Consegna giovedì 9 gennaio 2014

Esercizio 1 (Punti 6)**.** Si consideri il sottospazio vettoriale di $\mathbb{C}^4$ $A =< (i,0,0,1)^T,\ (1,0,i,1)^T,\ (2i,1,3,i)^T,\ (2-i,-1,-3+2i,3-i)^T >$.

1. Determinare una base ortogonale di A.
2. A è isomorfo a $\mathbb{C}^4$? In caso negativo completare la base prima ottenuta per A ad una base ortonormale di $\mathbb{C}^4$.
3. Si trovi la proiezione ortogonale su A di $(1,0,-1,2)^T$

Esercizio 2 (Punti 8)**.** Si consideri il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$ $V =< (1,0,1)^T,\ (1,1,0)^T,\ (2,-1,3)^T >$

1. Determinare una base ortogonale di V.
2. Completare la base prima ottenuta per V ad una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$.
3. Trovare $V^\perp$.
4. Sia $v = (1,0,-1)^T$. Verificare che $v = P_V(v) + P_{V^\perp}(v)$.

Esercizio 3 (Punti 4)**.** Si considerino i vettori $v_1 = (1,0,1,0)^T$, $v_2 = (3,1,0,1)^T$, $v_3 = (-1,1,1,2)^T$, $v_4 = (1,1,1,1)^T$ e $v_5 = (4,2,1,0)^T$.

1. È vero che $< v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 >= \mathbb{R}^4$?
2. A partire dai vettori v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 estrarre una base ortonormale di $\mathbb{R}^4$.

Esercizio 4 (Punti 6)**.**

1. Dimostrare che la seguente applicazione definisce un prodotto scalare in $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (\vec{v}, \vec{w}) &\longmapsto \langle \vec{v} | \vec{w} \rangle := (3v_1 + v_3)w_1 + 4v_2w_2 + (v_1 + 3v_3)w_3\ . \end{aligned}$$

2. Sia W il sottospazio di $\mathbb{R}^3$ generato da $[1 \quad 0 \quad 1]^T$ e $[-1 \quad 0 \quad 1]^T$. Determinare una base ortonormale di W.
3. Determinare il complemento ortogonale $W^\perp$ di W rispetto al prodotto scalare definito al punto precedente.

Esercizio 5 (Punti 6)**.**

1. Determinare autovalori e autovetori di

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

.

2. Determinare una base di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori di A.
3. A è simile ad una matrice diagonale? Se si, a quale matrice diagonale?
4. Determinare, se esiste, una base ortonormale diagonalizzante A.