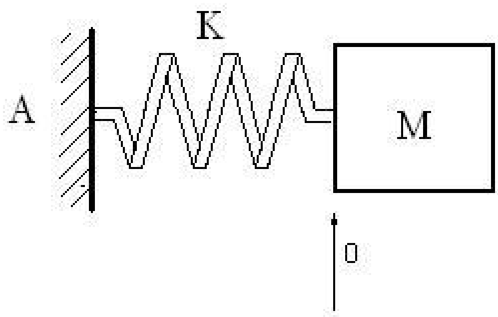
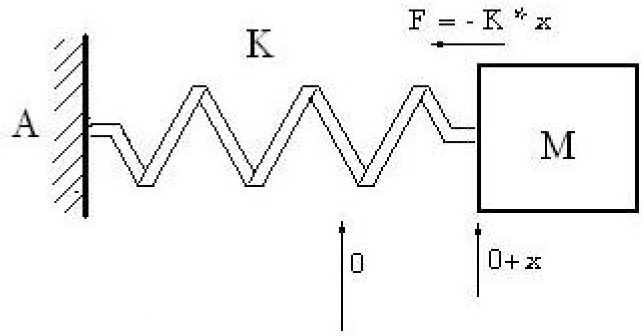
Esercizi Moto oscillatorio

1. (**Esame Luglio 2014**) Un blocco di massa m=680 g, fissato a una molla con k=65 N/m, è trascinato a una distanza x=11 cm dalla sua posizione di equilibrio x=0 su una superficie priva di attrito e lasciato libero, da fermo, all'istante t=0.
   a) Quali sono la pulsazione, la frequenza ed il periodo dell'oscillazione risultante?
   b) Qual è l'ampiezza risultante?
   c) Qual è la massima velocità del blocco oscillante?
   d) Qual è la massima accelerazione del blocco?
   e) Qual è l'energia totale del sistema?





Soluzione:

Dalla seconda legge di Newton abbiamo:
F = m.a(t) = -K.X(t)

Quindi:

$d^2X(t)/dt^2 = -(K/m).X(t) = -\omega^2.X(t)$

$\omega = \surd(K/m)$

La soluzione di questa equazione differenziale è:

$X(t) = A.\cos(\omega t + \phi)$

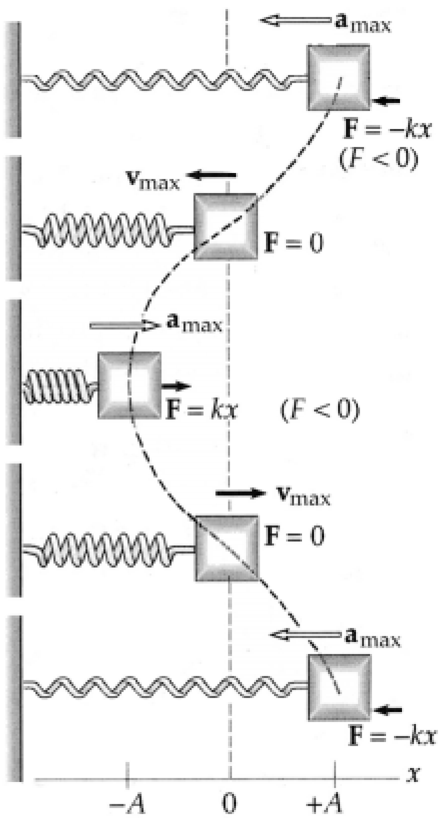
Applicando la **seconda legge di Newton** al moto nella direzione x si ha $F = ma_x = -kx$. Poiché $a_x = d^2x/dt^2$, ciò è equivalente all'Equazione 12.2.

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x \quad (12.2)$$

La soluzione generale dell'Equazione 12.2 rappresenta la dipendenza temporale della posizione x, purché sia $\omega^2 = k/m$. In questa espressione A rappresenta l'**ampiezza** del moto, $\omega t + \phi$ è la **fase**, ω è la **pulsazione** (rad/s) e ϕ è la **costante di fase**.

$$x(t) = A\cos(\omega t + \phi)$$

$$\text{con} \quad \omega^2 = \frac{k}{m} \quad (12.3)$$



a) La pulsazione:
$\omega = \surd(65/0,680) = 9,78$ rad/s
La frequenza:
$f = \omega / 2\pi = 9,78 / 2.(3,1416) = 1,56$ Hz

Il periodo:
$T = 1/f = 1 /1,56 = 0,64$ sec

b) L'ampiezza risultante:
$X(0) = A.\cos(0.t + \phi) = 0,11$
$A.\cos(\phi) = 0,11$
$V(0) = -A.\omega.\sin(\omega t + \phi) = 0$
$A.\omega.\sin(\phi) = 0$
$\phi = 0$
$A = 0,11$ m

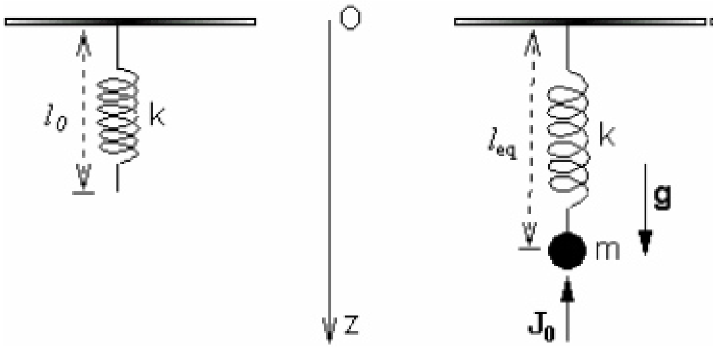
c) Velocità massima:
Da $X(t) = A.\cos(\omega t)$
$V(t) = dX(t)/dt = -A.\omega.\sin(\omega t)$
Sarà massima quando $\sin(\omega t) = -1$
$V_{max} = A.\omega = (0,11).(9,78) = 1,0758$ m/s

d) Accelerazione massima:
Da $V(t) = -A.\omega.\sin(\omega t)$
$a(t) = dV(t)/dt =- A.\omega^2.\cos(\omega t)$
Sarà massima quando $\cos(\omega t) = -1$
$V_{max} = A.\omega^2 = (0,11).(9,78)^2 = 10,52$ m/s^2

e) L'energia totale del sistema:
$E = ½.k.A^2$
$E = ½.65.(0,11)^2 = 0,3933$ J

2. (**Esame Luglio 2007**) Un corpo puntiforme di massa m=5 kg pende verticalmente essendo attaccato all'estremità inferiore di una molla di costante elastica k=100 N/m e lunghezza a riposo l_0=0.6 m, disposta verticalmente e avente l'estremità superiore vincolata ad un punto fisso O del soffitto.
Inizialmente il corpo si trova in condizioni di equilibrio statico. All'istante t = 0 il corpo subisce un impulso di intensità I_0 = 12.5 kg m/s agente in direzione verticale e rivolto verso l'alto.
Calcolare in un sistema di riferimento OZ orientato verso il basso:

a) la posizione di equilibrio iniziale del corpo;
b) l'equazione del moto del corpo per $t > 0$,
c) la legge oraria del moto oscillatorio del corpo tenendo conto delle condizioni al tempo $t = 0$.



Soluzione:

a) In equilibrio, prima dell'impulso:
$m.g = -K.\Delta Z$
$\Delta Z = -m.g/K$
$\Delta Z = -5.(-9,81) / 100 = 0,49$
$Z_{eq} = l_0 + \Delta Z = 0,6 + 0,49$
$Z_{eq} = 1,09$ m

b) L'equazione del moto:
$\Sigma F = m.a(t) = m.d^2Z(t)/dt^2$
$m.g - k.Z(t) = m.d^2Z(t)/dt^2$
$g - (k/m).Z(t) = d^2Z(t)/dt^2$
$d^2Z(t)/dt^2 + (k/m).Z(t) - g = 0$
$\omega = \sqrt{(K/m)}$
Quindi:
$d^2Z(t)/dt^2 + \omega^2.Z(t) = g$
Questa è una equazione differenziale non omogenea con soluzione:
$Z(t) = A.\cos(\omega t + \phi) + g/\omega^2$

c) La legge oraria del moto, con le condizioni iniziali:

$Z(0) = 1,09$

$V(0) = ?$

Calcoliamo la velocità iniziale a partire dall'impulso $I_0 = 12.5$ kg m/s

$I_0 = \Delta P = m.V_f - m.V_i = 12,5$

$V_i = 0$

$V_f = 12,5 / 5 = 2,5$ m/s

$V(0) = V_f = 2,5$ m/s

Da $Z(t) = A.\cos(\omega t + \phi) + g/\omega^2$

$V(t) = dZ(t)/dt = -A.\omega.\sin(\omega t + \phi)$

Quindi:

$Z(0) = A.\cos(\phi) + g/\omega^2 = 1,09$

$V(0) = -A.\omega.\sin(\phi) = 2,5$

$A.\cos(\phi) = 1,09 - g/\omega^2 = 1,09 - 9,8/20 = 0,6$

$A.\sin(\phi) = -2,5/\omega = -2,5/4,47 = -0,56$

$\tan(\phi) = -0,9333$

$\phi = -0,75$ rad

$A = 0,82$ m

La legge oraria sarà:

$Z(t) = 0,82.\cos(4,47.t - 0,75) + 0,49$