Esercitazioni di Statistica per Biotecnologie

Francesca Pizzorni Ferrarese

Esercitazione II - Probabilità

Es. 1

Si estrae una carta a caso da un mazzo di 52 carte. Calcolare la probabilità che sia

a − un asso;

b − un fante di cuori;

c − un 3 di picche o un 6 di fiori;

d − un cuori;

e − un seme diverso da cuori;

f − un 10 o un quadri;

g − né un 4 né un picche.

Es. 2

Se in una stanza sono presenti n persone qual è la probabilità che nessuna di esse festeggi il compleanno nello stesso giorno dell'anno?

Es. 3

Trovare la probabilità che in due lanci di un dado si presenti almeno una volta il 5.

Es. 4

Si lancia un dado; sia A l'evento "esce un numero pari" e B l'evento "esce un numero maggiore di 3" . Verificare se A e B sono indipendenti.

Es. 5

Un'urna contiene 8 palline rosse, 3 palline bianche e 9 palline nere. Si estraggono tre palline a caso

senza rimetterle nell'urna dopo ogni estrazione. Determinare le probabilità che siano

a - tre rosse;

b - tre bianche;

c - una rossa, una bianca e una nera, nell'ordine.

Es. 6

Un dado viene lanciato 2 volte. Siano le v.c. X= numero di 6 usciti ed Y=numero di pari usciti. Calcolare
a - la distribuzione di X e rappresentarla in forma tabellare e grafica, la sua media e la sua varianza;
b - la distribuzione di Y e rappresentarla in forma tabellare e grafica, la sua media e la sua varianza;

Es. 7

In certi esperimenti l'errore commesso nella determinazione della solubilità di una sostanza è una

variabile casuale X avente distribuzione uniforme con a = – 0.025 e b = 0.025 .

Trovare la probabilità che l'errore

a - sia compreso fra 0.010 e 0.015;

b - sia compreso fra – 0.012 e 0.012.

Es. 8

Si consideri un dispositivo elettronico parte di un'apparecchiatura biomedicale utilizzata in terapia intensiva composto da n = 10 componenti che funziona fino a che almeno k= 2 componenti su 10 funzionano. Si supponga inoltre che tutti i componenti abbiano la stessa affidabilità p = 0. 05 e che funzionino indipendentemente uno dall'altro. Qual è l'affidabilità del sistema descritto?

Es. 9

Il numero di pazienti che arrivano al pronto soccorso di un ospedale al lunedì mattina è una variabile

casuale X con valor medio $\mu = 18$ e deviazione standard $\sigma = 2.5$.

Con quale probabilità si può asserire che il numero di pazienti è compreso fra 8 e 28?

Es. 10

Un test è costituito da 10 domande a risposta multipla: ci sono 4 risposte possibili per ogni domanda, di cui una sola esatta. Per superare il test occorre rispondere esattamente ad almeno 8

domande. Rispondendo a caso alle domande, qual è la probabilità di superare il test?

Es. 11

Se la probabilità che una persona non gradisca il gusto di un nuovo dentifricio è $p = 0.20$, qual è la probabilità che 5 su 18 persone scelte a caso non lo gradiscano?

Es. 12

La quantità di radiazioni cosmiche a cui è esposta una persona che attraversa in aereo gli Stati Uniti è una variabile aleatoria avente la distribuzione normale con media $\mu = 4.35$ mrem e deviazione standard $\sigma = 0.59$ mrem. Trovare la probabilità che la quantità di radiazioni cosmiche a cui la persona sarà esposta sia

a -tra 4.00 e 5.00 mrem;

b - più di 5.50 mrem.

N.B. Per avere un termine di paragone si consideri che la dose di radiazione a cui si è esposti durante una comune RX al torace è di 20 millirem.

Es. 13

Il 20% dei chip di memoria prodotti da un'azienda di componenti elettronici è difettoso; calcolare la probabilità che in un campione di 100 chip scelto a caso per un controllo

a - al più 15 siano difettosi;

b - esattamente 15 siano difettosi.

Es. 14

Sia X variabile casuale χ^2 con ν gradi di libertà. Si determinino le seguenti probabilità:
a) $P(X \leq 14{,}85)$ per $\nu = 12$
b) $P(4{,}35 \leq X \leq 11.07)$ per $\nu = 5$
c) $P(28{,}43 \leq X \leq 35.172)$ per $\nu = 23$

Es. 15

Una compagnia aerea sa che il 5% di tutti coloro che prenotano un volo, poi non

parte. Per questo motivo su un aereo da 195 posti sono state accettate 200 prenotazioni. Sia la v.c. X=numero di passeggeri, tra i 200 che hanno prenotato, che veramente partiranno.
a) Qual è la legge di X? Quale la media? Quale la varianza?
b) Calcolare la probabilità approssimata che tutti quelli che si presenteranno riusciranno a partire, ovvero $P(X \leq 195)$.

ESERCITAZIONE 2

PROBABILITÀ.

(6) Dato $A = \{2,4,6\} \Rightarrow A \cap B = \{4,6\}$

$B = \{4,5,6\}$

$$P(A) = P(B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{4}$$

$$P(A \cap B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

Dunque gli eventi non sono mai perché, essendo

$$P(A \cap B) \neq P(A) \cdot P(B)$$

In altre parole, sapere che è n° uscito è maggiore di 3 non fornisce nessuna informazione sulla probabilità che è numero uscito sia pari; infatti

$$P(A) = \frac{1}{2} \qquad P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{1/3}{1/2} = \frac{2}{3}$$

(7) La variabile X ha densità uniforme $X \sim Unif(-0{,}025, 0{,}025)$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{0{,}05} = 20 & -0{,}025 < x < 0{,}025 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

a). La probabilità richiesta è data da

$$P(0{,}010 \leq X \leq 0{,}015) = \int_{0{,}010}^{0{,}015} f(x)\,dx = 0{,}015 \cdot 20 - 0{,}010 \cdot 20 =$$

$$= 0{,}1$$

b) $P(-0{,}012 \leq X \leq 0{,}012) = \int_{-0{,}012}^{0{,}012} f(x)\,dx = 0{,}012 \cdot 20 + 0{,}012 \cdot 20 =$

$$= 0{,}24$$

(9) La probabilità che x assuma valori che si discostano dal suo valore atteso μ di ε non superi la varianza data per il quadrato di ε.

$$P(|X - \mu| > \varepsilon) \leq \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2} \qquad \varepsilon = 10$$

Considerando l'evento complementare:

$$P(\mu - \varepsilon < X < \mu + \varepsilon) > 1 - \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$$

$$P(8 < X < 28) > 1 - \frac{2{,}5^2}{10^2} = 0{,}9375$$

L'intervallo [8; 28] ha il 94% circa di probabilità di contenere l'osservazione.

(12) Per poter usare gli integrali della d.d.p. di Z dobbiamo riportarci alla Gaussiana standardizzata.

$$X \sim N(\mu; \sigma^2) \longrightarrow X \sim N(4,35; 0,59)$$

$$y = \frac{x-\mu}{\sigma} = \frac{x-4,35}{0,59}$$

a) se $x=4 \Rightarrow y = \frac{4-4,35}{0,59} = -0,59$

se $x=5 \Rightarrow y = \frac{5-4,35}{0,59} = 1,10$

$$\Rightarrow P(4<x<5) = P(-0,59<y<1,10) =$$

$$= P(-0,59<y<0) + P(0<y<1,10) =$$

$$= P(0<y<0,59) + P(0<y<1,10) =$$

$$= 0,224 + ,3643 = 0,5883$$

b) se $x = 5,5 \Rightarrow y = \frac{5,5-4,35}{0,59} = 1,95$

$$\Rightarrow P(x>5,5) = P(y>1,95) =$$

$$= 1 - P(y<1,95) = 0,5 - P(0<y<1,95) =$$

$$= 0,5 - 0,4744 = 0,0256$$

(15) X è una variabile aleatoria binomiale $X \sim Bi(200, 0,95)$

a) $\Rightarrow E[X] = \sum_{i=1}^{n} E[X_i] = \sum_{i=1}^{n} p = np =$ $\sim Be(0,95)$

$n=200 \quad p=0,95$

$q=0,05$

$= 190$

$$Var[X] = \sum_{i=1}^{n} Var[X_i] = \sum_{i=1}^{n} pq = npq = 200 \cdot 0,95 \cdot 0,05 =$$

$= 9,5$

b) Sappiamo dal TLC che $X \simeq Z \sim N(190, 9,5)$

$$P(X \leq 195) \simeq P(Z \leq 195) = P\left(Z^* \leq \frac{195-190}{\sqrt{9,5}}\right) =$$

$$= P(Z^* \leq 1,62) = 0,5 + P(0<Z^*<1,62) =$$

$$= 0,5 + 0,4474 = 0,9474$$

ESERCITAZIONE 2 - PROBLEMI PROPOSTI

② Evento A = "Tutti compiono gli anni in giorni diversi"

Per n persone si hanno 365^n casi possibili

I casi favorevoli si hanno quando tutti compiono gli anni in giorni $\neq$

$$\Rightarrow P(A) = \frac{365 \cdot 364 \cdot \ldots \cdot (365-(n-1))}{365^n}$$

n	10	20	23	30	40	50	60	70	80
P(A)	0,8831	0,5886	0,4927	0,2937	0,1088	0,0296	0,0059	0,0008	0,00085

⑤ R_1 = "rossa I estrazione"

B_1 = "bianca " "

R_2 = "rossa II " "

B_2 = "bianca " "

....

a) evento $R_1 \cap R_2 \cap R_3$ = "Tre rosse"

$$P(R_1 \cap R_2 \cap R_3) = P(R_1) \cdot P(R_2|R_1) \cdot P(R_3|R_1 \cap R_2) =$$

$$= \frac{8}{20} \cdot \frac{7}{19} \cdot \frac{6}{18} = \frac{14}{285} \simeq 0,049$$

b) evento $B_1 \cap B_2 \cap B_3$ = "Tre bianche"

$$P(B_1 \cap B_2 \cap B_3) = P(B_1) \cdot P(B_2|B_1) \cdot P(B_3|B_1 \cap B_2) =$$

$$= \frac{3}{20} \cdot \frac{2}{19} \cdot \frac{1}{18} = \frac{1}{1140} \simeq 0,00088$$

c) $P(R_1 \cap B_2 \cap N_3) = P(R_1) \cdot P(B_2|R_1) \cdot P(N_3|R_1 \cap B_2) =$

$$= \frac{8}{20} \cdot \frac{3}{19} \cdot \frac{9}{18} = \frac{3}{95} \simeq 0,0316$$

⑥ X

d_i	$P(D=d_i)$
0	0,69
1	0,27
2	0,14

$P(D=0) = \binom{2}{0}\left(\frac{1}{6}\right)^0\left(\frac{5}{6}\right)^2$ $p = \frac{1}{6}$ $n = 2$

$$= \frac{2!}{0!(2-0)!} \cdot 1 \cdot \frac{25}{36} = \frac{\cancel{2}}{\cancel{2}} \cdot \frac{25}{36} = 0,69$$

$P(D=2) = \binom{2}{2}\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^0 = \frac{5}{36}$

$P(D=1) = \binom{2}{1}\left(\frac{1}{6}\right)^1\left(\frac{5}{6}\right)^1 = \frac{2!}{1!\,1!} \cdot \frac{5}{36} = \frac{10}{36} = 0,27$

4

d_i	$P(D=d_i)$
0	0,25
1	0,5
2	0,25

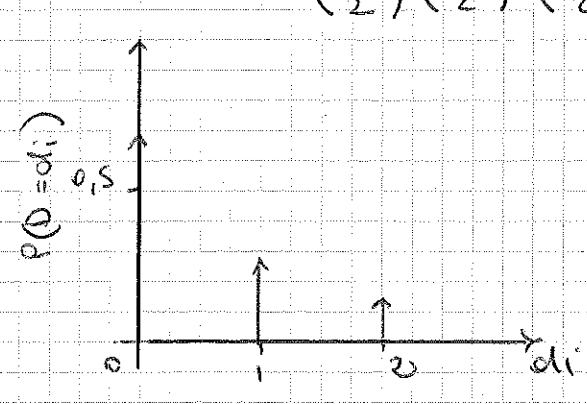
$n=2 \qquad p=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$

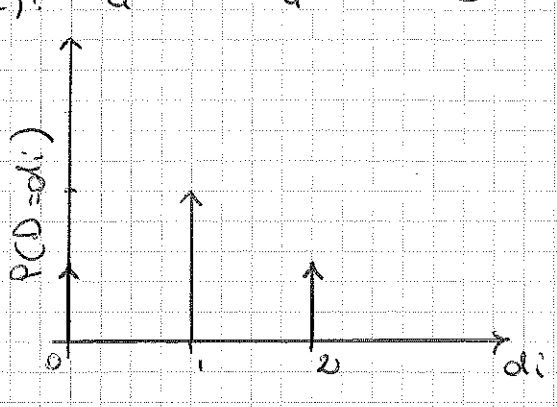
$$P(D=0)=\binom{2}{0}\left(\frac{1}{2}\right)^0\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{2!}{0!(2-0)!}\cdot 1\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$$

$$P(D=1)=\binom{2}{1}\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{2!}{1!\,1!}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

$$P(D=2)=\binom{2}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^0=\frac{2!}{2!(2-2)!}\cdot\frac{1}{4}\cdot 1=\frac{1}{4}$$

(X)





(10) La v.c. X manca il nº di risposte esatte

$n=10 \qquad n=8 \qquad p=\frac{1}{4}$

$$P(X\geq 8)=P(X=8)+P(X=9)+P(X=10)=$$

$$=\binom{10}{8}\left(\frac{1}{4}\right)^8\left(1-\frac{1}{4}\right)^2+\binom{10}{9}\left(\frac{1}{4}\right)^9\left(1-\frac{1}{4}\right)^1+\binom{10}{10}\left(\frac{1}{4}\right)^{10}\left(1-\frac{1}{4}\right)^0=$$

$$=45\left(\frac{1}{4}\right)^8\left(\frac{3}{4}\right)^2+10\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^9\left(\frac{3}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}\right)^{10}=0,00041158\simeq 0,04\%$$

(13)

Si deve calcolare la probabilità $P(X\leq 15)$

a) Approssimiamo alla normale.

$np=100\cdot 0,2=20 \qquad n(1-p)=100\cdot 0,8=80$

$\mu=np=100\cdot 0,2=20 \qquad \sigma=\sqrt{np(1-p)}=\sqrt{100\cdot 0,2\cdot 0,8}=4$

$$z=\frac{15-20}{4}=-1,25$$

$$P(t<-1,25)=1-P(z<1,25)=1-(0,5+P(0<z<1,25)=$$

$$=0,5-0,3944=0,1056$$

b) Si deve calcolare $P(X=15)$

$$P(X \leq 15) - P(X \leq 14) = \cancel{1} - P(Z < 1{,}25) - \left[\cancel{1} - \overbrace{P(Z < 1{,}5)}^{0{,}5 + P(0 < Z < 1{,}5)}\right] =$$

$\uparrow \frac{14-20}{4} = -1{,}5$

$$= -\cancel{0{,}5} - 0{,}3944 + \cancel{0{,}5} + 0{,}4332 =$$

$$= 0{,}0388$$

(14) a) $P(X \leq 14{,}85)$ per $\nu = 12$

$$= 1 - P(X \geq 14{,}85) = 1 - 0{,}250 = 0{,}75$$

b) $P(4{,}35 \leq X \leq 11{,}07)$ per $\nu = 5$

$$= P(X \geq 4{,}35) - \ldots P(X \geq 11{,}07)) = 0{,}5 - 0{,}05 = 0{,}45$$

c) $P(28{,}43 \leq X \leq 35{,}172)$ per $\nu = 23$

$$= P(X \geq 28{,}43) - P(X \geq 35{,}172) =$$

$$= 0{,}2 - 0{,}05 = 0{,}15$$