La Trasformata di Fourier

Mauro Zucchelli

Univeristà degli studi di Verona, Dipartimento di Informatica

April 10, 2017

1 La serie di Fourier

Data una funzione $f(t)$ definita in un intervallo di tempo T, la possiamo esprimere in *serie di Fourier* come

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nw_0 t) + b_n \sin(nw_0 t) \tag{1}$$

Dove i coefficienti a_0, a_n e b_n sono calcolati come

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_T f(t)dt \tag{2}$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_T f(t)\cos(nw_0 t)dt \tag{3}$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_T f(t)\sin(nw_0 t)dt \tag{4}$$

e l'armonica fondamentale w_0 è definita come $\frac{2\pi}{T}$.

La *formula di Eulero* mette in relazione le funzioni trigonometriche seno e coseno con l'esponenziale complesso:

$$e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x) \tag{5}$$

$$\cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \tag{6}$$

$$\sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \tag{7}$$

Possiamo quindi riscrivere la serie di Fourier e i relativi coefficienti come

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inw_0 t} \tag{8}$$

$$c_n = \frac{1}{T}\int_T f(t)e^{-inw_0 t}dt \tag{9}$$

n.b. la serie di Fourier è periodica in T

n.b.b. assumendo $f(t)$ periodica in T possiamo scrivere $\int_T$ come $\int_{-T/2}^{T/2}$

2 La trasformata di Fourier continua

Considerando un segnale aperiodico $f(t)$, possiamo costruire un segnale periodico $f_T(t)$ ripetendo il segnale originario $f(t)$ ogni T secondi. Questo nuovo segnale $f_T(t)$ può essere rappresentato come serie di Fourier:

$$f_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inw_0 t} \tag{10}$$

$$c_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f_T(t)e^{-inw_0 t}dt \tag{11}$$

con $w_0 = \frac{2\pi}{T}$ Quando $T \to \infty$ il limite $\lim_{T\to\infty} f_T(t) = f(t)$. Sostituendo nelle equazioni della serie di Fourier

$$f(t) = \lim_{T\to\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inw_0 t} \tag{12}$$

$$c_n = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f_T(t)e^{-inw_0 t}dt \tag{13}$$

Chiamando $F(nw_0) = \lim_{T\to\infty} Tc_n$ possiamo scrivere

$$\begin{aligned} F(w) &= \lim_{T\to\infty}\int_{-T/2}^{T/2} f_T(t)e^{-iwt}dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-iwt}dt \end{aligned} \tag{14}$$

considerando per semplicità w uguale a $w_0 n$ per adesso. La serie di Fourier può essere dunque espressa come:

$$f(t) = \lim_{T\to\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{F(nw_0)}{T} e^{inw_0 t} \tag{15}$$

Considerando che quando $T \to \infty$ abbiamo che $w_0 \to 0$. Possiamo quindi definire il differenziale $\Delta w = \lim_{w_0\to 0} w$ e sostrituirlo nella formula della serie

$$f(t) = \lim_{\Delta w} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{F(n\Delta w)\Delta w}{2\pi} e^{in\Delta w t} \tag{16}$$

Questa sommatoria a limite per $w_0 \to 0$, può essere vista come l'area sottostante la funzione $F(w)e^{iwt}$ approssimata con il metodo dei rettangoli. Possiamo dunque riscrivere tutto sotto forma di integrale come

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(w)e^{iwt}dt \tag{17}$$

$$F(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-iwt}dt \tag{18}$$

Il passaggio da $f(t)$ a $F(w)$ prende il nome di *trasformata di Fourier* (continua), mentre il passaggio da $F(w)$ a $f(t)$ rappresenta la trasformata di Fourier *inversa*.

n.b. Alle volte si trova la trasformata di Fourier esplicitata nello spazio delle frequenze non normalizzate $f = \frac{1}{T}$. Considerando che w può essere scritto come $2\pi f$ e la funzione nel dominio nel tempo come $x(t)$ per evitare ambiguità, la trasformata di Fourier può anche essere scritta come

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(f)e^{2\pi i f t}dt && (19) \\ X(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-2\pi i f t}dt && (20) \end{aligned}$$

le due notazioni sono completamente equivalenti.

3 Alcuni esempi di CFT

3.1 La funzione rect

La funzione *rect* è definita come:

$$rect(t) = \begin{cases} 0, & \text{if } |t| > \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}, & \text{if } |t| = \frac{1}{2} \\ 1, & \text{if } |t| < \frac{1}{2} \end{cases} \tag{21}$$

La sua trasformata di Fourier può essere calcolata come:

$$\begin{aligned} F(w) &= \int_{-\infty}^{\infty} rect(t)e^{-iwt}dt \\ &= \int_{-1/2}^{1/2} e^{-iwt}dt \\ &= \frac{-1}{iw}\left(e^{-\frac{iw}{2}} - e^{\frac{iw}{2}}\right) \\ &= \frac{2sin(w/2)}{w} \\ &= \frac{sin(w/2)}{w/2} \end{aligned} \tag{22}$$

3.2 La funzione Gaussiana

La funzione Gaussiana è definita come:

$$f(t) = e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} \tag{23}$$

dove σ è la deviazione standard. La sua trasformata di Fourier si può calcolare come:

$$\begin{aligned} F(w) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}e^{-iwt}dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(\frac{t^2}{2\sigma^2}+iwt\right)}dt \end{aligned} \tag{24}$$

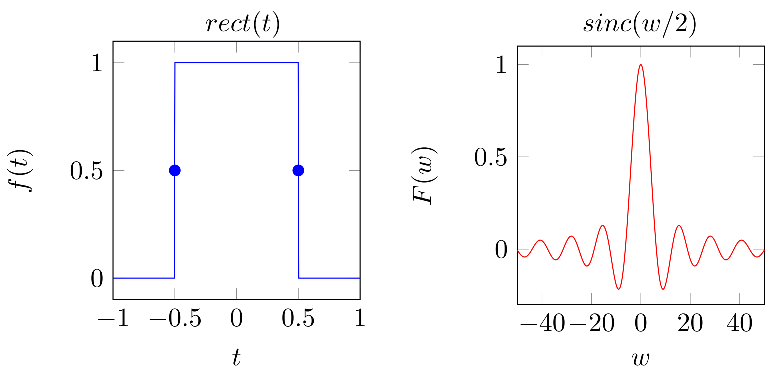

Figure 1: La funzione *rect* (sinistra) e la sua trasformata di Fourier (destra).

Usando il seguente integrale indefinito

$$\int e^{-(ax^2+2bx+c)} dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}} \exp\left(\frac{b^2-ac}{a}\right) \operatorname{erf}\left(\sqrt{a}x + \frac{b}{\sqrt{a}}\right) \tag{25}$$

dove erf è la funzione degli errori (vedi Fig 2).

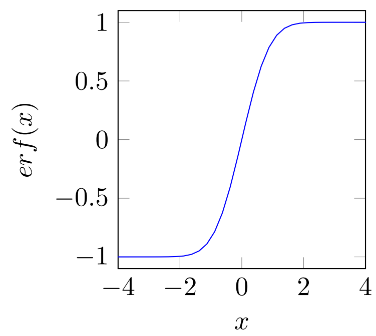

Figure 2: La funzione erf.

Considerando che nel nostro caso $a = \frac{1}{2\sigma^2}$, $b = \frac{iw}{2}$ e $c = 0$ possiamo scrivere:

$$\begin{aligned}
F(w) &= \left[\frac{1}{2}\sqrt{2\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{\sigma^2 w^2}{2}\right) \operatorname{erf}\left(\sqrt{\frac{1}{2\sigma^2}}t + \frac{iw\sqrt{2\sigma^2}}{2}\right)\right]_{-\infty}^{\infty} \\
&= \frac{1}{2}\sqrt{2\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{\sigma^2 w^2}{2}\right) \left[\operatorname{erf}\left(\sqrt{\frac{1}{2\sigma^2}}t + \frac{iw\sqrt{2\sigma^2}}{2}\right)\right]_{-\infty}^{\infty} \\
&= \frac{1}{2}\sqrt{2\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{\sigma^2 w^2}{2}\right) \Big[\operatorname{erf}(\infty) - \operatorname{erf}(-\infty)\Big] \\
&= \frac{1}{2}\sqrt{2\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{\sigma^2 w^2}{2}\right) \Big[1 - (-1)\Big] \\
&= \sqrt{2\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{\sigma^2 w^2}{2}\right)
\end{aligned} \tag{26}$$

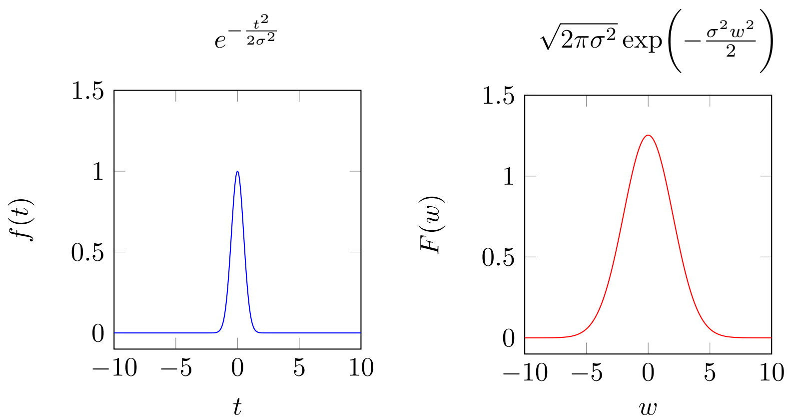

Figure 3: La funzione Gaussiana (sinistra) e la sua trasformata di Fourier (destra), con $\sigma = 0.5$.

3.3 La funzione delta di Dirac

La funzione delta di Dirac, o δ, è definita come:

$$\delta(t) = \begin{cases} 0, & \text{se } t \neq 0 \\ \infty, & \text{se } t = 0 \end{cases} \tag{27}$$

Alternativamente, la funzione $\delta(t)$ può essere definita come:

$$\delta(t) = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{\pi}} \exp\left(-n^2 t^2\right) \tag{28}$$

La sua trasformata di Fourier può essere calcolata come:

$$\begin{aligned} F(w) &= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-iwt} dt \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-n^2 t^2\right) e^{-iwt} dt \end{aligned} \tag{29}$$

Ponendo $n^2 = \frac{1}{2\sigma^2}$, ritroviamo l'integrale della funzione Gaussiana svolto precedentemente:

$$\begin{aligned} F(w) &= \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{\pi}} \frac{\sqrt{\pi}}{n} \exp\left(-\frac{w^2}{4n^2}\right) \\ &= \lim_{n\to\infty} \exp\left(-\frac{w^2}{4n^2}\right) \\ &= 1 \end{aligned} \tag{30}$$

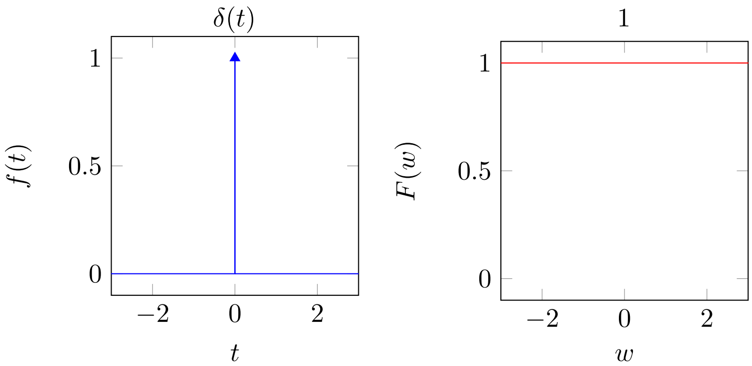

Figure 4: La funzione delta di Dirac (sinistra) e la sua trasformata di Fourier (destra)

3.4 La funzione $\delta(t-\tau)$

La funzione $\delta(t-\tau)$, non è altro che una delta di Dirac spostata di τ, ed è definita come:

$$\delta(t-\tau) = \begin{cases} 0, & \text{se } t \neq \tau \\ \infty, & \text{se } t = \tau \end{cases} \tag{31}$$

La sua trasformata di Fourier è definita come:

$$\begin{aligned} F(w) &= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-\tau) e^{-iwt} dt \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\left(-n^2(t-\tau)^2\right)} e^{-iwt} dt \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-(n^2t^2 - 2n^2\tau t + n^2\tau^2 + iwt)\right) dt \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\left(n^2t^2 + 2\left(\frac{iw}{2} - n^2\tau\right)t + n^2\tau^2\right)\right) dt \end{aligned} \tag{32}$$

Usando l'Eq. (25) con $a = n^2$, $b = \left(\frac{iw}{2} - n^2\tau\right)$ e $c = n^2\tau^2$ otteniamo

$$
\begin{aligned}
F(w) &= \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{\pi}} \left[\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{n^2}} \exp\left(\frac{\left(\frac{iw}{2} - n^2\tau\right)^2 - n^4\tau^2}{n^2} \right) \operatorname{erf}\left(\sqrt{n^2}t + \frac{\left(\frac{iw}{2} - n^2\tau\right)}{\sqrt{n^2}} \right) \right]_{-\infty}^{\infty} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} \exp\left(\frac{\left(\frac{iw}{2} - n^2\tau\right)^2 - n^4\tau^2}{n^2} \right) \left[\operatorname{erf}\left(nt + \frac{\left(\frac{iw}{2} - n^2\tau\right)}{n} \right) \right]_{-\infty}^{\infty} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} \exp\left(\frac{\left(\frac{iw}{2} - n^2\tau\right)^2 - n^4\tau^2}{n^2} \right) \left[\operatorname{erf}\left(nt + \frac{iw}{2n} - n\tau \right) \right]_{-\infty}^{\infty} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} \exp\left(\frac{\left(\frac{iw}{2} - n^2\tau\right)^2 - n^4\tau^2}{n^2} \right) \left[\operatorname{erf}(\infty) - erf(-\infty) \right] \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} \exp\left(\frac{\left(\frac{iw}{2} - n^2\tau\right)^2 - n^4\tau^2}{n^2} \right) \left[1 - (-1) \right] \\
&= \lim_{n\to\infty} \exp\left(\frac{\left(\frac{iw}{2} - n^2\tau\right)^2 - n^4\tau^2}{n^2} \right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \exp\left(-\frac{w^2}{n^2} - iw\tau + n^2\tau^2 - n^2\tau^2 \right) \\
&= \lim_{n\to\infty} e^{-\frac{w^2}{n^2}} e^{-iw\tau} \\
&= e^{-iw\tau}
\end{aligned}
\tag{33}
$$

4 Le proprietà della CFT

La tabella 1 illustra le principali proprietà della trasformata di Fourier. Vediamone

Operazione	**f(t)**	**F(w)**
addizione	$f_1(t) + f_2(t)$	$F_1(w) + F_2(w)$
moltiplicazione per uno scalare	$kf(t)$	$kF(w)$
simmetria	$F(t)$	$2\pi f(-w)$
dilatazione (con a reale)	$f(at)$	$\frac{1}{\lvert a\rvert}F\left(\frac{w}{a}\right)$
time shift	$f(t-\tau)$	$F(w)e^{-iw\tau}$
convoluzione nel tempo	$f_1(t) * f_2(t)$	$F_1(w)F_2(w)$
moltiplicazione nel tempo	$f_1(t)f_2(t)$	$\frac{1}{2\pi}F_1(w) * F_2(w)$

Table 1: Proprietà della trasformata di Fourier continua

ora alcune applicazioni pratiche:

4.1 La traformata di Fourier dell'esponenziale complesso

L'esponenziale complesso è definito come:

$$f(t) = e^{iw_0 t} \tag{34}$$

Possiamo sfruttare le proprietà della trasformata di Fourier per calcolare

$$F(w) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{iw_0 t} e^{-iwt} dt \tag{35}$$

Abbiamo visto nella sezione precedente che dato $f(t) = \delta(t - \tau)$ la sua trasformata risulta uguale a $F(w) = e^{-iw\tau}$. Considerando la proprietà di simmetria e ponendo $\tau = -w_0$ abbiamo che

$$F(t) = 2\pi f(-w) \tag{36}$$

La nostra trasformatà di Fourier risulta quindi

$$F(w) = 2\pi\delta(-w + w_0) = 2\pi\delta(w - w_0) \tag{37}$$

4.2 La traformata di Fourier del coseno

La trasformata di Fourier della funzione $f(t) = \cos(w_0 t)$ si puà calcolare sfruttando le formula di Eulero come la trasformata di due esponenziali complessi:

$$\begin{aligned}
F(w) &= \int_{-\infty}^{\infty} \cos(w_0 t) e^{-iwt} dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iw_0 t} + e^{-iw_0 t}}{2} e^{-iwt} dt \\
&= \frac{1}{2}\left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{iw_0 t} e^{-iwt} dt + \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iw_0 t} e^{-iwt} dt\right] \\
&= \frac{1}{2}\Big[2\pi\delta(w - w_0) + 2\pi\delta(w + w_0)\Big] \\
&= \pi\Big[\delta(w - w_0) + \delta(w + w_0)\Big]
\end{aligned} \tag{38}$$

4.3 Moltiplicazione e convoluzione per una delta

Moltiplicare una funzione $f(t)$ per una delta di Dirac $\delta(t)$ corrisponde a calcolare:

$$f(t)\delta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t) dt = f(0) \tag{39}$$

per definizione. Allo stesso modo la moltiplicazione di $f(t)$ per la funzione delta traslata $\delta(t - \tau)$

$$f(t)\delta(t - \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t - \tau) dt = f(\tau) \tag{40}$$

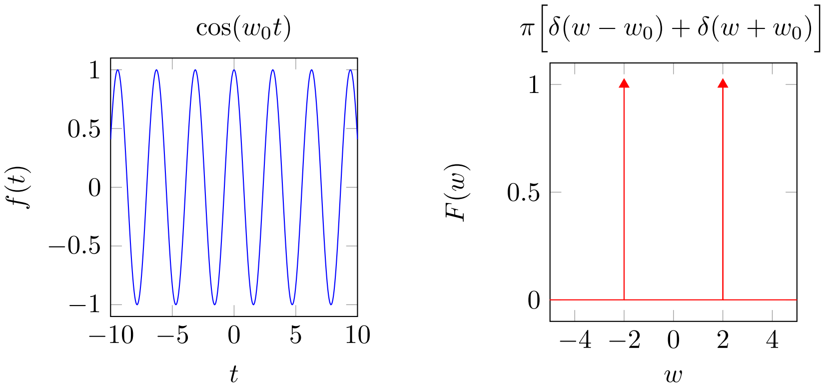

Figure 5: La funzione $\cos(2t)$ (sinistra) e la sua trasformata di Fourier (destra)

La convoluzione di $f(t)$ per $\delta(t-\tau)$ corrisponde a calcolare:

$$\begin{aligned}
f(t)*\delta(t-\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(T)\delta(t-\tau-T)dT \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(T)\delta(-T-\tau+t)dT \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(T)\delta(-T+(t-\tau))dT \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(T)\delta(T-(t-\tau))dT \\
&= f(t-\tau)
\end{aligned} \tag{41}$$

La convoluzione con una delta traslata di τ equivale quindi a traslare la funzione di τ.

4.4 Trasformata di Fourier di una funzione traslata

La trasformata di Fourier di una funzione traslata $f(t-\tau)$ equivale a calcolare:

$$\begin{aligned}
F(w) &= \mathcal{F}(f(t-\tau)) \\
&= \mathcal{F}(f(t)*\delta(t-\tau)) \\
&= \mathcal{F}(f(t))\mathcal{F}(\delta(t-\tau)) \\
&= F(w)e^{-iw\tau}
\end{aligned} \tag{42}$$

Il risultato è equivalente ad applicare la proprietà di time shift della trasformata.

4.5 La funzione treno di delta

Un treno di delta $\Delta_T(t)$ con frequenza T, chiamato comunemente *pettine di Dirac* è definito come:

$$\Delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-nT) \tag{43}$$

Il treno di delta, essendo una funzione periodica, può anche essere rappresentato in serie di Fourier $f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikw_0 t}$, dove i coefficienti c_n si possono calcolare come da definizione:

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{1}{T} \int_T \Delta_T(t) e^{-iw_0 t} dt \\ &= \frac{1}{T} \int_{T/2}^{T/2} \Delta_T(t) e^{-iw_0 t} dt \\ &= \frac{1}{T} \int_{T/2}^{T/2} \delta(t) e^{-iw_0 t} dt \\ &= \frac{1}{T} \end{aligned} \tag{44}$$

considerando che nell'intervallo $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}] \to \Delta_T(t) = \delta(t)$ e che l'integrale $\int_{T/2}^{T/2} \delta(t) e^{-iw_0 t} dt$ è uguale a $e^{-iw_0 0}$ essendo l'integrale di una funzione per una delta.
La funzione $\Delta_T(t)$ può essere quindi scritta come:

$$\Delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{ikt \frac{2\pi}{T}} \tag{45}$$

dato che $w_0 = \frac{2\pi}{T}$ per definizione.

4.6 Trasformata di Fourier di un treno di delta

La trasformata di Fourier del treno di delta si può calcolare come

$$\begin{aligned} F(w) &= \int_{-\infty}^{\infty} \Delta_T(t) e^{-iwt} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) e^{-iwt} dt \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) e^{-iwt} dt \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-iwnT} \end{aligned} \tag{46}$$

Considerando che $\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-iwnT}$ per la proprietà commutativa è uguale a $\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{iwnT}$, possiamo ricondurre $F(w)$ alla definizione alternativa di treno di delta:

$$\begin{aligned} F(w) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-iwnT} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{iwnT} \\ &= \frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(w - k\frac{2\pi}{T}\right) \\ &= \frac{2\pi}{T} \Delta_{\frac{2\pi}{T}}(w) \\ &= w_0 \Delta_{w_0}(w) \end{aligned} \tag{47}$$

questo ponendo, con un piccolo abuso di notazione, $T = \frac{2\pi}{T} = w_0$, $t = w$ e $k = n$ nella definizione di $\Delta_T(t)$.

In conclusione, la trasformata di Fourier di un treno di delta non è altro che un treno di delta nel dominio delle frequenze con passo di campionamento inversamente proporzionale a quello del dominio del tempo. Questo fatto implica che, nel caso del treno di delta, un campionamento molto fitto nel tempo (T molto piccolo) implica un campionamento grossolano nelle frequenze ($w_0 = \frac{2\pi}{T}$ grande) e viceversa.

4.7 Trasformata di Fourier di una funzione periodica

La rappresentazione periodica di una funzione $f(t)$, con periodo N può essere definita come

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(t - nN) \tag{48}$$

La sua trasformata di Fourier è definita come

$$
\begin{aligned}
X(w) &= \mathcal{F}(x(t)) \\
&= \mathcal{F}\Bigg(\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(t-nN)\Bigg) \\
&= \mathcal{F}\Bigg(\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(t) * \delta(t-nN)\Bigg) \\
&= \mathcal{F}\Bigg(f(t) * \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-nN)\Bigg) \\
&= \mathcal{F}\Bigg(f(t)\Bigg)\mathcal{F}\Bigg(\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-nN)\Bigg) \\
&= F(w)\frac{2\pi}{N}\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\Bigg(w - k\frac{2\pi}{N}\Bigg) \\
&= \frac{2\pi}{N}\sum_{k=-\infty}^{\infty} F(w)\delta\Bigg(w - k\frac{2\pi}{N}\Bigg) \\
&= \frac{2\pi}{N}\sum_{k=-\infty}^{\infty} F\Bigg(k\frac{2\pi}{N}\Bigg) \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} w_0 F(kw_0) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} F[k]
\end{aligned}
\tag{49}
$$

La trasformata di Fourier di una funzione periodica risulta quindi equivalente alla trasformata di Fourier della funzione stessa, ma campionata con una frequenza inversamente proporzionale al periodo della funzione (vedi Fig. 6 confrontata con Fig. 3).

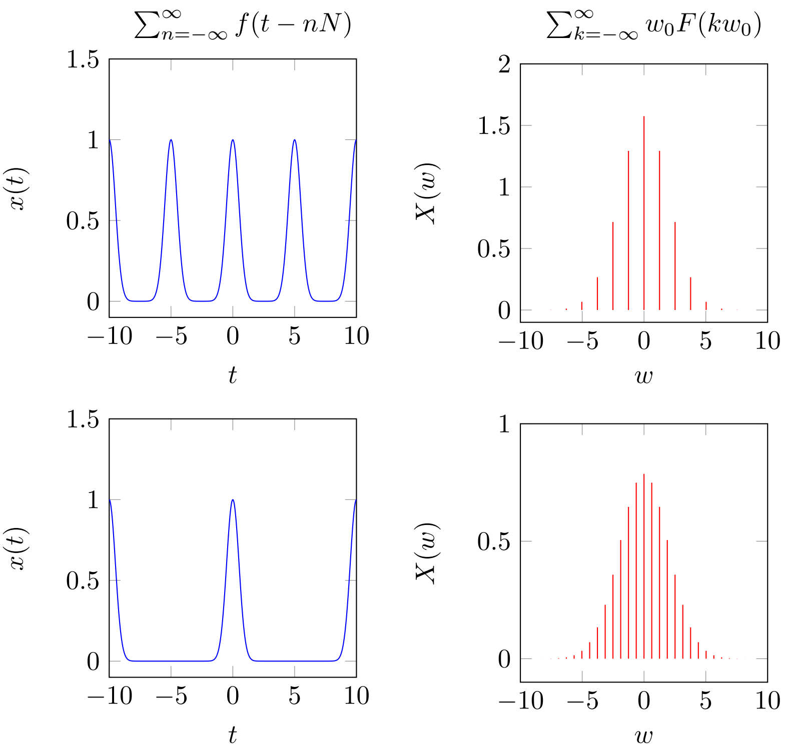

Figure 6: Una Gaussiana periodica (sinistra) e la sua trasformata di Fourier (destra). Nella prima riga la funzione è periodica con $N = 5$, nella seconda con $N = 10$.

5 La trasformata di Fourier a tempo discreto (DTFT)

La trasformata di Fourier a tempo discreto, in inglese Discrete Time Fourier Transform (DTFT), rappresenta la trasformata di Fourier di una funzione campionata nel dominio del tempo.

Tale funzione può essere definita come:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f[n] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} Tf(nT) \tag{50}$$

La sua trasformata di Fourier, e quindi la sua DTFT, può essere definita come:

$$
\begin{aligned}
X(w) &= \mathcal{F}(x(t)) \\
&= \mathcal{F}\Bigg(\sum_{n=-\infty}^{\infty} Tf(nT) \Bigg) \\
&= \mathcal{F}\Bigg(\sum_{n=-\infty}^{\infty} Tf(t)\delta(t-nT) \Bigg) \\
&= \mathcal{F}\Bigg(Tf(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-nT) \Bigg) \\
&= \mathcal{F}\Bigg(Tf(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-nT) \Bigg) \\
&= \frac{T}{2\pi}\mathcal{F}\Bigg(f(t) \Bigg) * \mathcal{F}\Bigg(\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-nT) \Bigg) \\
&= \frac{T}{2\pi}F(w) * \mathcal{F}\Bigg(\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-nT) \Bigg) \\
&= \frac{T}{2\pi}F(w) * \frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\Bigg(w - k\frac{2\pi}{T} \Bigg) \\
&= F(w) * \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\Bigg(w - k\frac{2\pi}{T} \Bigg) \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} F(w) * \delta\Bigg(w - k\frac{2\pi}{T} \Bigg) \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} F\Bigg(w - k\frac{2\pi}{T} \Bigg) \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} F(w - kw_0)
\end{aligned} \tag{51}
$$

La DTFT non è altro che la periodizzazione nel dominio delle frequenze della trasformata di Fourier della funzione campionata $f(t)$. La Fig. 7 mostra alcuni esempi di DTFT nel caso di $f(t)$ Gaussiana. Si noti come, con il progressivo aumentare di T, $F(w)$ si sovrappongano (effetto meglio noto come *aliasing*). Per evitare questo fenomeno è necessario che $1/T$ sia almeno il doppio della frequenza massima del segnale (*teorema di Nyquist-Shannon*).

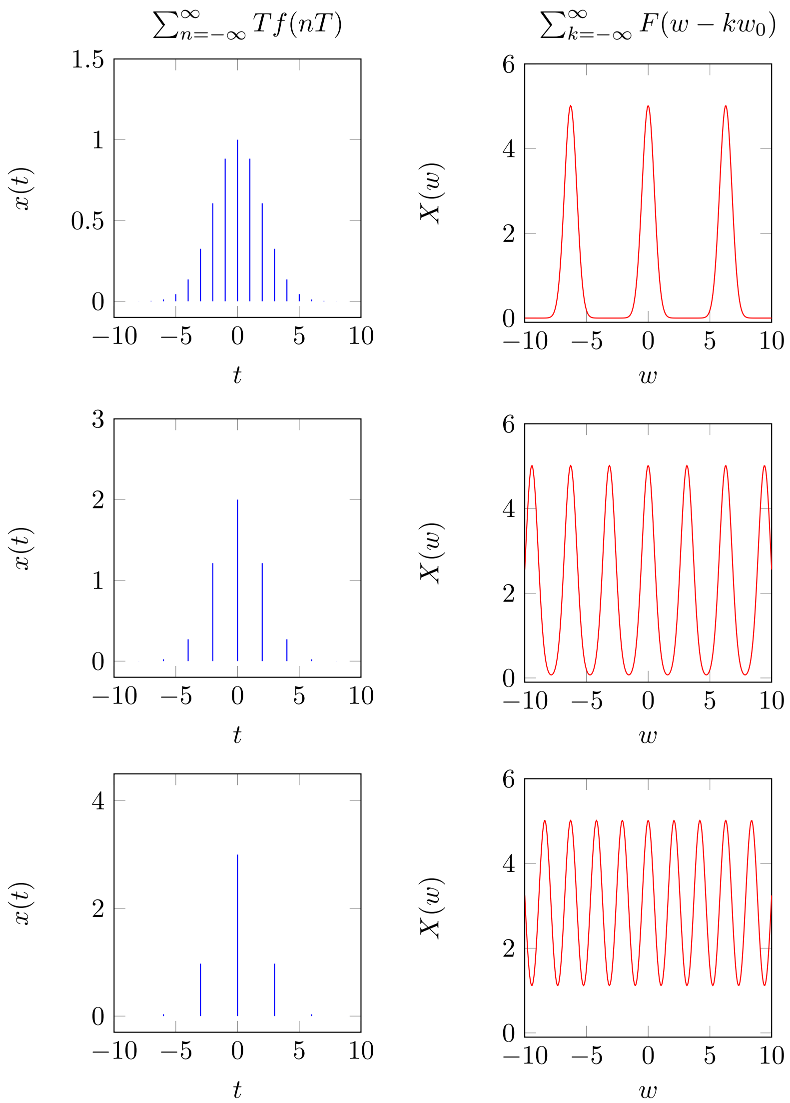

Figure 7: Una Gaussiana ($\sigma = 2$) campionata nel dominio del tempo (sinistra) e la sua trasformata di Fourier DTFT (destra). Nella prima riga la funzione è campionata con $T = 1$, nella seconda con $T = 2$ e nella terza con $T = 3$.

Un modo alternativo di calcolare la trasformata di Fourier di una funzione campionata è il seguente:

$$
\begin{aligned}
X(w) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-jwt}dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f[n]e^{-jwt}dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} Tf(nT)e^{-jwt}dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} Tf(t)\delta(t-nT)e^{-jwt}dt \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} Tf(t)\delta(t-nT)e^{-jwt}dt \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} Tf(nT)e^{-jwnT} \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} f[n]e^{-jwnT}
\end{aligned} \tag{52}
$$

In questo modo possiamo calcolare $X(w)$ direttamente dai valori dei campioni di $f[n]$. Considerando la simmetria della serie di esponenziali complessi $X(w)$ è equivalente a

$$
X(w) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f[n]e^{jwnT} \tag{53}
$$

È interessante notare la simmetria che c'è tra $X(w)$ e la rappresentazione di un segnale in serie di Fourier:

$$
f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jtnw_0} \tag{54}
$$

dove in questo caso i coefficienti di Fourier sono i punti della nostra funzione $c_n = f[n]$, $w_0 = T$ e siamo nel dominio delle frequenze anziché in quello del tempo.

6 Dalla DTFT alla DFT

La DTFT nel dominio delle frequenze è una funzione continua. Possiamo pensare di campionarla con passo di campionamento $\frac{2\pi}{NT}$, dove N è il numero di campioni di $f[n]$, ed ottenere così una sua versione a frequenze discrete:

$$\begin{aligned} X\left[k\right] &= \frac{2\pi}{NT} X\left(\frac{2\pi}{NT}\right) = \frac{2\pi}{NT} \sum_{N} f[n] e^{-jkn\frac{2\pi}{NT}T} \\ &= \frac{2\pi}{NT} X\left(\frac{2\pi}{NT}\right) = \frac{2\pi}{NT} \sum_{N} f[n] e^{-jkn\frac{2\pi}{N}} \end{aligned} \tag{55}$$

Possiamo ricavare il segnale che genera tale funzioni nel dominio nel tempo calcolando l'anti-trasformata di $X[k]$

$$\begin{aligned} x(t) &= \mathcal{F}^{-1}\left(X(w)\right) \\ &= \mathcal{F}^{-1}\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} X[k]\right) \\ &= \mathcal{F}^{-1}\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{2\pi}{NT} \sum_{N} f[n] e^{-jkn\frac{2\pi}{N}}\right) \\ &= \mathcal{F}^{-1}\left(\sum_{N} f[n] \frac{2\pi}{NT} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-jkn\frac{2\pi}{N}}\right) \\ &= \mathcal{F}^{-1}\left(\sum_{N} f[n] e^{-jwn} \frac{2\pi}{NT} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(w - \frac{2\pi}{NT}\right)\right) \\ &= \mathcal{F}^{-1}\left(\sum_{N} f[n] e^{-jwnT}\right) * \mathcal{F}^{-1}\left(\frac{2\pi}{NT} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(w - \frac{2\pi}{NT}\right)\right) \\ &= \sum_{N} f[n] * \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta\left(t - mNT\right) \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{N} f[n - mN] \end{aligned} \tag{56}$$

Il segnale nel dominio nel tempo, non è altro che il segnale campionato $f[n]$ periodico che si ripete ogni N campioni, equivalenti a NT secondi. Questo è in linea con i risultati precendentemente ottenuti che volevano che la trasformata di Fourier di un sengale periodico, è un segnale campionato nel dominio delle frequenze.

Dato un segnale tempo discreto, periodico, possiamo quindi calcolare la sua trasformata di Fourier discreta, o in inglese *discrete Fourier transform* (**DFT**) come

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} f[n] e^{-jkn\frac{2\pi}{N}} \tag{57}$$

In modo analogo possiamo ricavare la DFT inversa come

$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] e^{jkn\frac{2\pi}{N}} \tag{58}$$

È interessante notare come nella DFT si ha lo stesso numero di campioni della versione aperiodica del segnale considerato sia nel dominio del tempo che nelle frequenze. Per come è stato definito inoltre, la risoluzione delle nostre frequenze è uguale a $\frac{2\pi}{NT}$. Per campionare in modo più fino lo spazio delle frequenze sono possibili due strategie: o si incrementa T la distanza dei campioni nel dominio nel tempo (questa scelta è sconsigliata per i motivi visti con la DTFT), oppure N. Nel caso di un segnale Gaussiano nel dominio del tempo che decade a zero all'interno di N come nel caso dell'esempio in figura 7, un modo semplice per aumentare la risoluzione delle frequenza consiste nell'aggiungere degli zeri in testa e in coda del nostro segnale: questa operazione prende il nome di *zero-padding*.

ATTENZIONE: nel caso la funzione non decada a zero all'interno di N, aggiungere degli zeri vuol dire moltiplicare $x(t)$ per una funzione $rect$. Questa operazione equivale a convolvere $X(w)$ per il $sinc(w/2)$ nel dominio delle frequenze, generando delle distorsioni.