

ESAME (2 ore circa)

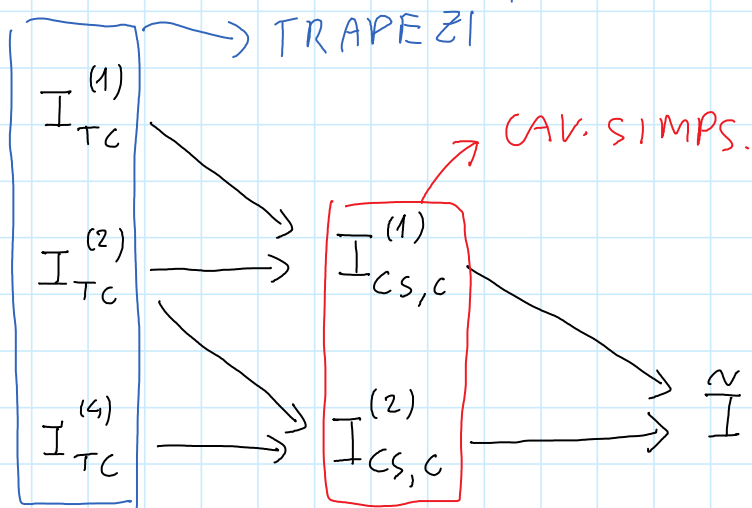
- circa 15 domande chiuse (scegliere quella corretta tra alcune opzioni) con pochi conti.
Tre queste domande sono di Matlab (di base).
(giusta: +1 punto; errata o non data: 0).
- 2 o 3 esercizi aperti brevi (mezza faccenda)
- 1 domanda teorica breve.

Esame in aula di lezione con uno o due turni in base al numero.

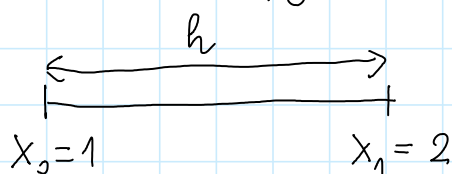
Due turni: $14 \div 16$ e $16 \div 18$.

ESERCIZIO Applicazione Romberg con $m=4$ intervalli per calcolare

$$\int_1^2 \ln(x) dx$$



Calcolo $I_{TC}^{(1)}$; $e^- m=1$



$$h = 2 - 1 = 1$$

$$I_{TC}^{(1)} = \frac{f(x_0) + f(x_1)}{2} h = \frac{f(1) + f(2)}{2} \cdot 1 =$$

$$x_0 = 1$$

$$x_1 = 2$$

$$\begin{aligned} I_{TC}^{(1)} &= \frac{f(x_0) + f(x_1)}{2} h = \frac{f(1) + f(2)}{2} \cdot 1 = \\ &= \frac{1}{2} \left[\cancel{h(1)} + h(2) \right] = \frac{1}{2} h(2) \approx \\ &\approx 0.34657359 \end{aligned}$$

Calcolo $I_{TC}^{(2)}$; $\bar{e} \quad m=2$

$$\begin{array}{ccc} \xleftarrow{h} & \xleftarrow{h} & \\ | & | & | \\ x_0 & x_1 & x_2 \\ || & || & || \\ 1 & 1.5 & 2 \end{array} ; \quad h = \frac{x_2 - x_0}{m} = \frac{2-1}{2} = 0.5$$

$$\begin{aligned} I_{TC}^{(2)} &= \frac{h}{2} \left[f(x_0) + 2f(x_1) + f(x_2) \right] = \\ &= \frac{0.5}{2} \left[h(1) + 2h(1.5) + h(2) \right] \approx \\ &\approx 0.376019349 \end{aligned}$$

Calcolo $I_{TC}^{(4)}$; $\bar{e} \quad m=4$

$$\begin{array}{cccccc} \xleftarrow{h} & \xleftarrow{h} & \xleftarrow{h} & \xleftarrow{h} & & \\ | & | & | & | & | & \\ x_0 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & \\ || & || & || & || & || & \\ 1 & 1.25 & 1.5 & 1.75 & 2 & \end{array} ; \quad h = \frac{x_4 - x_0}{m} = \frac{2-1}{4} = 0.25$$

$$\begin{aligned} I_{TC}^{(4)} &= \frac{h}{2} \left[f(x_0) + 2 \left(f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) \right) + f(x_4) \right] = \\ &= \frac{0.25}{2} \left[h(1) + 2 \left(h(1.25) + h(1.5) + h(1.75) \right) + h(2) \right] \approx \\ &\approx 0.383699509 \end{aligned}$$

PROCEDO A CALCOLARE LA SECONDA COLONNA DELLO SCHEMA DI ROMBERG

$$I_{CS,C}^{(1)} = \frac{4 I_{TC}^{(2)} - I_{TC}^{(4)}}{3} = 0.385834602$$

$$I_{CS,C}^{(2)} = \frac{4 I_{TC}^{(4)} - I_{TC}^{(2)}}{3} = 0.386259562$$

PROCEDO A CALCOLARE LA TERZA COLONNA

$$\tilde{I} = \frac{16 I_{CS,C}^{(2)} - I_{CS,C}^{(1)}}{15} = 0.386287892$$

che rappresenta la miglior approssimazione dell'integrale ottenibile con $m=4$ intervalli.

Vediamo l'errore commesso. Il valore vero dell'integrale è

$$\begin{aligned} I &= \int_1^2 \ln(x) dx = \int_1^2 (x)' \ln(x) dx = \left[x \ln(x) - x \right]_1^2 = \\ &= [2 \ln(2) - 2] - [1 \cdot \ln(1) - 1] = 2 \ln(2) - 1 \approx 0.386294361 \end{aligned}$$

per cui l'errore è

$$|I - \tilde{I}| = 6.5 \cdot 10^{-6} \approx 10^{-5}$$

(da confrontare con $I_{TC}^{(4)} = 0.383699509$).

ESERCIZIO Sia $p(x) = (x-1)^3$ che ha l'unica radice $\xi = 1$ con molteplicità $\mu = 3$.

(a) Scrivere esplicitamente l'iterazione di Newton, indicare qual è l'ordine di convergenza del metodo e calcolare le prime due iterati x_1 e x_2 a partire da $x_0 = 5/2$.

$$x_{k+1} = x_k - \frac{p(x_k)}{p'(x_k)} = x_k - \frac{(x_k - 1)^3}{3(x_k - 1)^2} = \frac{2x_k + 1}{3}, \quad k=0,1,2,\dots$$

$$X_{k+1} = X_k - \frac{f(X_k)}{f'(X_k)} = X_k - \frac{(X_k - 1)}{3(X_k - 1)^2} = \frac{2X_k + 1}{3}, \quad k=0,1,2,\dots$$

$$X_0 = \frac{5}{2}$$

$$X_1 = \frac{2X_0 + 1}{3} = \frac{2 \cdot \frac{5}{2} + 1}{3} = \frac{6}{3} = 2$$

$$X_2 = \frac{2X_1 + 1}{3} = \frac{2 \cdot 2 + 1}{3} = \frac{5}{3} = 1.\bar{6}$$

Dato che la radice ha molteplicità $\mu = 3 > 1$, il metodo di Newton ha ordine 1 (è lineare).

- (b) Scrivere il legame tra gli errori e_{k+1} ed e_k e utilizzare questa informazione per ottenere l'ordine del metodo.

Riconosciamo che $e_k = \xi - X_k$ dove ξ è la radice che stiamo approssimando. Perciò, risulta

$$\begin{aligned} e_{k+1} &= \xi - X_{k+1} = 1 - \left(\frac{2}{3} X_k + \frac{1}{3} \right) = \frac{2}{3} - \frac{2}{3} X_k = \\ &= \frac{2}{3} (1 - X_k) = \frac{2}{3} (\xi - X_k) = \frac{2}{3} e_k \end{aligned}$$

per cui risulta

$$\boxed{e_{k+1} = \frac{2}{3} e_k}$$

Ne segue che

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{|e_{k+1}|}{|e_k|} = \frac{2}{3}$$

per cui l'ordine del metodo è 1 con costante asintotica dell'errore $M = 2/3$.

(c) Quante iterazioni sono necessarie per avere $\frac{|e_k|}{|e_0|} < 10^{-6}$?

Dato che $e_k = \frac{2}{3} e_{k-1}$, iterando, otteniamo

$$e_k = \frac{2}{3} e_{k-1} = \frac{2}{3} \left(\frac{2}{3} e_{k-2} \right) = \left(\frac{2}{3} \right)^2 e_{k-2} = \dots = \left(\frac{2}{3} \right)^k e_0$$

per cui è

$$\frac{|e_k|}{|e_0|} = \left(\frac{2}{3} \right)^k$$

per cui deve essere

$$\left(\frac{2}{3} \right)^k < 10^{-6} \Leftrightarrow k \log_{10} \left(\frac{2}{3} \right) < \log_{10} (10^{-6}) \Leftrightarrow k > \frac{-6}{\log_{10} \left(\frac{2}{3} \right)} \approx 34.07$$

0 < 2/3 < 1

Quindi, servono 35 iterazioni.

(d) Scrivere un metodo di ordine 2 che può essere utilizzato per approssimare le radici $\xi = 1$ di $f(x) = (x-1)^3$

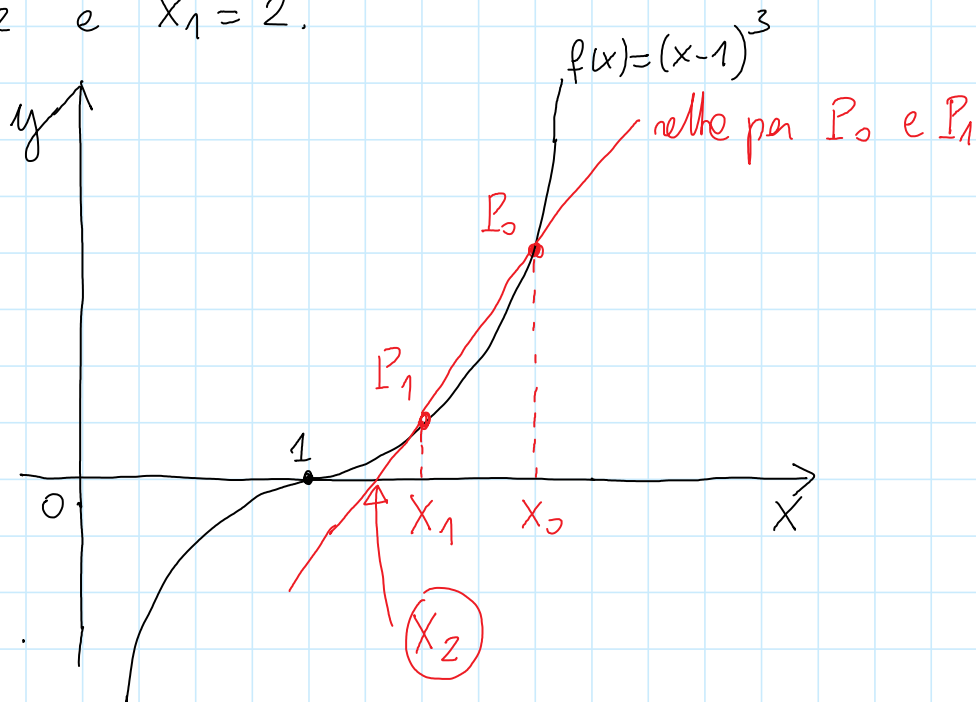
Basta prendere il metodo di Newton modificato:

$$x_{k+1} = x_k - \mu \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = x_k - \frac{(x_k-1)^3}{3(x_k-1)^2} =$$

$$= \cancel{x_k} - \cancel{x_k} + 1 = 1, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

per cui già x_1 è la radice esatta!

- (e) Calcolare X_2 col metodo delle secanti variabile partendo da $X_0 = 5/2$ e $X_1 = 2$.



ESERCIZIO Si consideri il metodo iterativo di punto fisso

$$X_{k+1} = \sqrt{X_k + 1}, \quad k=0, 1, 2, \dots$$

- a) Dimostrare che esiste un unico punto fisso ξ , calcolarlo e dire se il metodo converge a ξ partendo da $X_0 = 3$. Nel caso converge, la successione X_n è monotona? Se sì, di che tipo? (CRESCENTE / DECRESCENTE).

[Sugg. basta disegnare il grafico di $g(x) = \sqrt{x+1}$ e usare l'interpretazione geometrica]

- b) È possibile scegliere X_0 in modo tale che la successione X_n sia monotona crescente in senso stretto?
- c) Calcolare le prime due iterazioni del metodo partendo da $X_0 = 3$.
- d) Disegnare un possibile grafico di $\log_{10}(|e_k|)$ in funzione di k (per k "grande").

[Sugg: bisogna stabilire l'ordine del metodo che è legato alle derivate di $g(x) \dots$]

c) Stimare il numero di iterazioni necessarie per ottenere $|e_n| < 10^{-6} \cdot |e_0|$

f) È affidabile un test di arresto basato sullo scarto (es. $|x_{n+1} - x_n|$)?

ESERCIZIO Sia $A \underline{x} = \underline{b}$ il sistema lineare con

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ 6 \end{pmatrix}$$

che ha come soluzione esatta $\underline{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

a) Dire, guardando la matrice A e i metodi iterativi di Jacobi e Gauss-Seidel se sono convergenti o meno.

La matrice A è diagonale dominante perché, ad esempio,

$$|4| > |2| + |0| \quad 1^{\text{a}} \text{ riga}$$

$$|5| > |2| + |2| \quad 2^{\text{a}} \text{ "}$$

$$|4| > |0| + |2| \quad 3^{\text{a}} \text{ "}$$

per cui i metodi sono entrambi convergenti.

b) Scrivere, per esteso, le equazioni di aggiornamento componenti per componente di Jacobi e calcolare le prime iterazioni partendo da $\underline{x}^{(0)} = (0 \ 0 \ 0)^T$.
Ripetere per il metodo di Gauss-Seidel.

Ripetere per il metodo di Gauss-Seidel.

$$A \underline{x} = \underline{b} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x_1 + 2x_2 = 6 \\ 2x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 9 \\ 2x_2 + 4x_3 = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{6 - 2x_2}{4} \\ x_2 = \frac{9 - 2x_1 - 2x_3}{5} \\ x_3 = \frac{6 - 2x_2}{4} \end{cases}$$

da cui seguono i metodi

JACOBI

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \frac{6 - 2x_2^{(k)}}{4} \\ x_2^{(k+1)} = \frac{9 - 2x_1^{(k)} - 2x_3^{(k)}}{5}, k=0,1,2,\dots \\ x_3^{(k+1)} = \frac{6 - 2x_2^{(k)}}{4} \end{cases}$$

GAUSS-SEIDEL

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \frac{6 - 2x_2^{(k)}}{4} \\ x_2^{(k+1)} = \frac{9 - 2x_1^{(k+1)} - 2x_3^{(k)}}{5}, k=0,1,2,\dots \\ x_3^{(k+1)} = \frac{6 - 2x_2^{(k+1)}}{4} \end{cases}$$

Calcolo $\underline{x}^{(1)}$ con $\underline{x}^{(0)} = \begin{pmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \\ x_3^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$x_1^{(1)} = \frac{6 - 2 \cdot 0}{4} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

$$x_1^{(1)} = \frac{3}{2}$$

$$x_2^{(1)} = \frac{9 - 2 \cdot 0 - 2 \cdot 0}{5} = \frac{9}{5}$$

$$x_2^{(1)} = \frac{9 - 2 \cdot \frac{3}{2} - 2 \cdot 0}{5} = \frac{6}{5}$$

$$x_3^{(1)} = \frac{6 - 2 \cdot 0}{4} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

$$x_3^{(1)} = \frac{6 - 2 \cdot \frac{6}{5}}{4} = \frac{18}{20} = \frac{9}{10}$$

$\Downarrow$

$\Downarrow$

$$\underline{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} 3/2 \\ 9/5 \\ 3/2 \end{pmatrix} \quad \Downarrow$$

$$\underline{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} 3/2 \\ 6/5 \\ 9/10 \end{pmatrix} \quad \Downarrow$$

- c) Calcolare la norma infinito del residuo $\underline{r}^{(1)}$ della prima iterata del metodo di Jacobi.
- d) Scrivere le matrici di iterazione di Jacobi e Gauss-Seidel e calcolare il raggio spettrale della matrice di iterazione di Gauss-Seidel.
- e) Stimare il numero di iterazioni necessarie a Gauss-Seidel per avere

$$\frac{\|\underline{e}^{(n)}\|}{\|\underline{e}^{(0)}\|} < 10^{-6}.$$