

Algebra Lineare ed Elementi di Geometria

Programma svolto nel Modulo **Algebra Lineare**

0. INTRODUZIONE AL LINGUAGGIO MATEMATICO

§1. Insiemi

- 1.1 Esempi
- 1.2 Come si denota un insieme
- 1.3 Altri esempi
- 1.4 Sottoinsieme, sottoinsieme proprio
- 1.5 Principio di doppia inclusione
- 1.6 Esempi
- 1.7 L'insieme delle parti
- 1.8 Esempi
- 1.9 Teorema: se M ha n elementi, l'insieme delle parti ne ha 2^n .
- 1.10 Unione, intersezione, differenza, complemento, prodotto cartesiano
- 1.11 Esempi
- 1.12 Alcune proprietà

(vedi anche Precorso on-line, LEZIONI: Capitolo INSIEMI)

§2. Tecniche dimostrative

- 2.1 Dimostrazioni e controesempi
- 2.2 Gli assiomi di Peano
- 2.3 Principio di induzione
- 2.4 La somma dei primi n numeri naturali
- 2.5 Dimostrazione del Teorema 1.9

(vedi anche [GS, Appendice B])

§3. Numeri complessi

- 3.1 Il campo \mathbb{C}
- 3.2 Numeri immaginari
- 3.3 Forma algebrica di un numero complesso
- 3.4 Coniugato e modulo
- 3.5 Esempio
- 3.6 Coordinate polari
- 3.7 Forma trigonometrica di un numero complesso
- 3.8 Prodotto di numeri complessi in forma trigonometrica
- 3.9 La Formula di De Moivre
- 3.10 Definizione: radici n -esime

- 3.11 Teorema sulle radici n -esime
- 3.12 Esempio: Divisione del cerchio
- 3.13 Esempio
- 3.14 Teorema Fondamentale dell'Algebra

(vedi anche [GS, Appendice A])

I. MATRICI E SISTEMI LINEARI

§4. Matrici e loro operazioni

- 4.1 Esempio
- 4.2 Definizioni
- 4.3 Esempi
- 4.4 Somma di due matrici
- 4.5 Moltiplicazione di una matrice per uno scalare
- 4.6 Prodotto di due matrici
- 4.7 Altri esempi

(vedi [GS, Capitolo I])

§5. Sistemi lineari e matrici

- 5.1 Esempi
- 5.1 Sistemi lineari in forma matriciale
- 5.3 Operazioni elementari
- 5.4 Metodo di eliminazione di Gauss (EG)
- 5.5 Risoluzione di un sistema lineare
- 5.6 Esempio
- 5.7 Rango di una matrice
- 5.8 Matrici elementari

(vedi [GS, Capitolo I])

§6. Matrici inverse

- 6.1 Lemma e Definizione
- 6.2 Esempi
- 6.3 Proposizione (sistemi lineari equivalenti)
- 6.4 Proposizione
- 6.5 Proposizione
- 6.6 Teorema (esistenza dell'inversa destra)
- 6.7 Definizione di H-trasposta
- 6.8 Teorema (esistenza dell'inversa sinistra)
- 6.9 Corollario (matrici invertibili)
- 6.10 Calcolo della matrice inversa. Esempio

(vedi [GS, Capitolo I])

II. SPAZI VETTORIALI

§7. Spazi vettoriali e basi

- 7.1 Gruppo
- 7.2 Campo
- 7.3 Spazio vettoriale
- 7.4 Esempi
- 7.5 Proposizione

- 7.6 Combinazioni lineari
- 7.7 Esempi
- 7.8 Insieme di generatori, base
- 7.9 Esempi
- 7.10 Spazi vettoriali finitamente generati
- 7.11 Esempi

§8. Dipendenza e indipendenza lineare

- 8.1 Definizione di indipendenza lineare
- 8.2 Osservazione: base = insieme di generatori linearmente indipendente
- 8.3 Esempi
- 8.4 Caratterizzazione di dipendenza lineare
- 8.5 Esempi
- 8.6 Proposizione
- 8.7 Caratterizzazioni di una base
- 8.8 Proposizione

(vedi [GS, Capitolo II])

§9. Dimensione di uno spazio vettoriale

- 9.1 Esistenza della base.
- 9.2 Teorema di Steinitz
- 9.3 Corollario
- 9.4 Dimensione.
- 9.5 Esempi
- 9.6 Teorema: completamento della base
- 9.7 Proprietà di uno spazio vettoriale di dimensione n
- 9.8 Esempi

(vedi [GS, Capitolo II])

§10. Sottospazi di uno spazio vettoriale

- 10.1 Definizione di sottospazio
- 10.2 Esempi
- 10.3 Un sottospazio di V coincide con V se e solo se ha la stessa dimensione.
- 10.4 L'intersezione di due sottospazi
- 10.5 Esempio (unione di sottospazi)
- 10.6 La somma di due sottospazi
- 10.7 Formula di Grassmann
- 10.8 Somma diretta di due sottospazi
- 10.9 Esempi e osservazioni

(vedi [GS, Capitolo II])

§11. Applicazioni lineari

- 11.1 Definizione
- 11.2 Esempi
- 11.3 Alcune proprietà
- 11.4 Lemma
- 11.5 Teorema: Ogni spazio vettoriale su K di dimensione n è isomorfo a K^n .
- 11.6 Definizione: l'applicazione delle coordinate

- 11.7 Esempi
- 11.8 Corollario: due spazi vettoriali sono isomorfi se e solo se hanno la stessa dimensione.
- 11.9 nucleo e immagine
- 11.10 Esempi
- 11.11 Teorema (nullità + rango)
- 11.12 Corollario

(vedi [GS, Capitolo II])

§12. Quattro spazi associati a una matrice

- 12.1 Lemma
- 12.2 L'applicazione $f_A : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$, $x \mapsto Ax$ associata a $A \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$
- 12.3 Lemma
- 12.4 Teorema sul rango
- 12.5 Corollario
- 12.6 Osservazione su A^H
- 12.7 Teorema dei quattro sottospazi: $\mathbb{K}^m = C(A) \oplus N(A^H)$ e $\mathbb{K}^n = C(A^H) \oplus N(A)$
- 12.8 Esempio
- 12.9 Procedimento per determinare basi di $C(A)$ e $N(A)$
- 12.10 Teorema di Rouché - Capelli
- 12.11 Teorema: le soluzioni di $Ax=b$ sono i vettori di forma $p + u$ con $u \in N(A)$
- 12.12 Esempi
- 12.13 Procedimento per la risoluzione di un sistema lineare

(vedi [GS, Capitolo II])

§13. Applicazioni lineari e matrici

- 13.1 Lo spazio vettoriale $\text{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$
- 13.2 Osservazioni
- 13.3 La matrice associata a un'applicazione lineare rispetto alla base canonica
- 13.4 Esempi
- 13.5 Teorema: $M_{m \times n}(\mathbb{K}) \cong \text{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m)$
- 13.6 Esempio
- 13.7 La matrice del cambiamento di base $\mathcal{B}_1 \rightarrow \mathcal{B}_2$
- 13.8 Esempio
- 13.9 La matrice associata a un'applicazione lineare $f : V \rightarrow W$ rispetto alle basi $\mathcal{B}(V)$ e $\mathcal{B}(W)$
- 13.10 Teorema sul cambiamento di basi
- 13.11 Corollario
- 13.12 Matrici simili

(vedi [A, Capitoli 7 e 8], [GS, Capitolo II])

III. IL DETERMINANTE

§14. Il determinante di una matrice quadrata

- 14.1 Definizione (per ricorrenza)
- 14.2 Regola di Sarrus
- 14.3 Seconda definizione (assiomatica)
- 14.4 Altre proprietà
- 14.5 Teorema di Binet
- 14.6 Proposizione su $\det A = 0$

- 14.7 Corollario: una matrice quadrata A è invertibile se e solo se $\det A \neq 0$.
- 14.8 Corollario: $\det A = \det A^T$
- 14.9 Teorema di Laplace
- 14.10 Teorema di Cramer
- 14.11 Calcolo della matrice inversa (secondo metodo)
- 14.12 Determinante a blocchi

(vedi [A, Capitolo 9], [GS, Capitolo IV])

IV. AUTOVALORI E AUTOVETTORI

§15. Gli autovalori di una matrice

- 15.1 Definizione di autovalore e autovettore
- 15.2 Esempi
- 15.3 Osservazione
- 15.4 Definizione di polinomio caratteristico.
- 15.5 Teorema
- 15.6 Corollario: A possiede n autovalori (non necessariamente reali, né necessariamente distinti)
- 15.7 Autospazi e molteplicità algebriche e geometriche
- 15.8 Esempi
- 15.9 Proprietà del polinomio caratteristico
- 16.10 Teorema di Cayley-Hamilton (senza dimostrazione)

§16. Diagonalizzazione di una matrice

- 16.1 Osservazione
- 16.2 Definizione: matrici diagonalizzabili
- 16.3 Teorema sulla diagonalizzazione.
- 16.4 Esempi
- 16.5 Proprietà delle matrici simili.
- 16.6 Corollario
- 16.7 Esempio

§17. Criteri di diagonalizzazione

- 17.1 Lemma sugli autospazi
- 17.2 Corollario: $A \in M_{n \times n}$ è diagonalizzabile se possiede n autovalori distinti.
- 17.3 Lemma sulle molteplicità
- 17.4 Teorema: $A \in M_{n \times n}$ è diagonalizzabile su \mathbb{C} se e solo se $m_\lambda = d_\lambda$ per ogni autovalore λ .
- 17.5 Algoritmo per la diagonalizzazione
- 17.6 Corollario

(vedi [GS, Capitolo V])

§18. Prodotti interni e norme

- 18.1 Prodotto scalare canonico su \mathbb{K}^n
- 18.2 Esempi
- 18.3 Prodotto interno
- 18.4 Esempi
- 18.5 Spazio vettoriale metrico, norma associata a $\langle \cdot, \cdot \rangle$
- 18.6 Teorema di Pitagora, Disuguaglianza di Cauchy-Schwarz
- 18.7 Definizione assiomatica di norma

§19. Basi ortonormali

- 19.1 ortogonale, ortonormale
- 19.2 Le coordinate di un vettore rispetto a una base ortonormale
- 19.3 Esempi
- 19.4 proiezione ortogonale, complemento ortogonale
- 19.5 Teorema: Per un sottospazio $U \subset V$ si ha $\mathbb{K}^n = U \oplus U^\perp$
- 19.6 Esempio: Per $A \in m_{m \times n}$ si ha $N(A) = C(A^H)^\perp$

(vedi [GS, Capitolo III], [A, Capitolo 10])

§20. Matrici ortogonali e unitarie

- 20.1 Osservazione sulle matrici unitarie
- 20.2 Matrici unitarie e matrici ortogonali
- 20.3 Determinante e autovalori di una matrice unitaria
- 20.4 Teorema di Schur
- 20.5 Corollario
- 20.6 Esempio
- 20.7 Matrici hermitiane e matrici normali
- 20.8 Esempi
- 20.9 Teorema Spettrale
- 20.10 Corollario sulle matrici simmetriche in $M_{n \times n}(\mathbb{R})$

(vedi [GS, Capitolo VI], [A, Capitolo 11])

Bibliografia:

[A] M. ABATE, Algebra lineare, McGraw-Hill 2000.

[GS] E. GREGORIO, L. SALCE: Algebra lineare. Libreria Progetto, 2005.

PRECORSO ON-LINE: sito web <http://precorso.dicom.uninsubria.it/>