

Mercoledì: 14:30 → 16:00

16:00 → 17:30

16:15 → 17:45

ESEMPIO Consideriamo il calcolo degli autovalori della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 101 & 110 \\ -90 & -98 \end{pmatrix}$$

si può far vedere che ha autovalori $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = 2$.
Se perturbiamo la matrice in questo modo

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 100 & 110 \\ -90 & -98 \end{pmatrix}$$

gli autovalori di $\hat{A}$ sono $\hat{\lambda}_1 \approx 1 + i10$, $\hat{\lambda}_2 \approx 1 - i10$.
A fronte della piccola perturbazione su a_{11} (che è dell'1%)
abbiamo una grande variazione degli autovalori. Se ne
deduce che il problema del calcolo degli autovalori di
una matrice può essere un problema MALCONDIZIONATO.

DEF. Consideriamo il problema matematico dato da
 $y = T(x)$, $x \in X$, $y \in Y$.

Sia $x_0 \in X$; sia $y_0 = T(x_0)$.

Se $\|x_0\| \neq 0$ e $\|y_0\| \neq 0$, si definisce
NUMERO DI CONDIZIONAMENTO RELATIVO $K(x_0)$
il numero positivo

$$K(x_0) = \sup_{\substack{\delta x \\ \text{ammissibili}}} \frac{\frac{\|\delta y\|}{\|y_0\|}}{\frac{\|\delta x\|}{\|x_0\|}}$$

→ è come con gli errori relativi.

dove δy è la variazione dell'uscita y a causa
della perturbazione δx dell'ingresso.

Se, invece, $\|x_0\| = 0$ o $\|y_0\| = 0$ si definisce il
NUMERO DI CONDIZIONAMENTO ASSOLUTO

$$K_{abs}(x_0) = \sup_{\substack{\delta x \\ \text{ammissibili}}} \frac{\|\delta y\|}{\|\delta x\|}$$

Osservare che i numeri di condizionamento dipendono dall'ingresso x_0 ; lo stesso problema può essere ben condizionato per un certo x_0 e mal condizionato per un altro. Inoltre, se $k(x_0)$ è "grande" il problema è mal condizionato mentre se $k(x_0)$ è "piccolo" il problema è ben condizionato (sempre per il dato x_0).

ESEMPIO Consideriamo il problema di valutare la funzione $f(x)$, $x \in \mathbb{R}$ nel punto $x_0 \in \mathbb{R}$.
Supponiamo che sia $x_0 \neq 0$ e $f(x_0) \neq 0$.
Ci proponiamo di calcolare $K(x_0)$.

In questa situazione, prendiamo come norme il valore assoluto (sono in $\mathbb{R}$). Dato calcolare

$$K(x_0) = \sup_{\delta x} \frac{\frac{|\delta y|}{|f(x_0)|}}{\frac{|\delta x|}{|x_0|}} = \sup_{\delta x} \frac{|x_0| \cdot |\delta y|}{|f(x_0)| \cdot |\delta x|} \quad (*)$$

δy è la perturbazione dell'uscita y causata dalla perturbazione dell'ingresso δx ; è

$$\begin{aligned} \delta y &= f(x_0 + \delta x) - f(x_0) = \left(\begin{array}{l} \delta x \text{ è piccolo!} \Rightarrow \text{uso} \\ \text{sviluppo di Taylor} \end{array} \right) \\ &\approx f(x_0) + f'(x_0) \delta x - f(x_0) \\ &= f'(x_0) \delta x \end{aligned}$$

Sostituiamo $\delta y = f'(x_0) \delta x$ nell'equazione (*):

$$\dots \dots \dots \frac{|x_0| \cdot |f'(x_0) \cdot \delta x|}{\dots \dots \dots |x_0| \cdot |f'(x_0)| \cdot |\delta x|}$$

$$k(x_0) = \sup_{\delta x} \frac{|x_0| \cdot |f'(x_0) \cdot \delta x|}{|f(x_0)| \cdot |\delta x|} = \sup_{\delta x} \frac{|x_0| \cdot |f'(x_0)| \cdot |\delta x|}{|f(x_0)| \cdot |\delta x|} =$$

$$= \left| \frac{x_0 f'(x_0)}{f(x_0)} \right|.$$

Consideriamo, a titolo esemplificativo,

$$f(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$$

Se $x_0 > 0$ e "grande", Allora, risulta

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+1}} - \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x+1}}{2\sqrt{x}\sqrt{x+1}} = \frac{-f(x)}{2\sqrt{x(x+1)}}$$

Allora

$$k(x_0) = \left| \frac{x_0 f'(x_0)}{f(x_0)} \right| = \left| \frac{-1}{2\sqrt{x_0(x_0+1)}} \cdot x_0 \right| = \frac{x_0}{2\sqrt{x_0(x_0+1)}} =$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{x_0}{x_0(x_0+1)}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{x_0+1-1}{x_0+1}} = \frac{1}{2} \sqrt{1 - \frac{1}{x_0+1}}$$

Però, è

$$0 < k(x_0) < \frac{1}{2}.$$

È un problema BEN CONDIZIONATO.

ESEMPIO Consideriamo il calcolo delle radici dell'equazione

$$g(x) + \alpha = 0$$

dove g è una funzione (regolare) e α è un parametro reale che assumiamo come dato da cui dipende ciascuna delle soluzioni dell'equazione. In altri termini, ogni radice dell'equazione dipende da α :

$$x = x(\alpha)$$

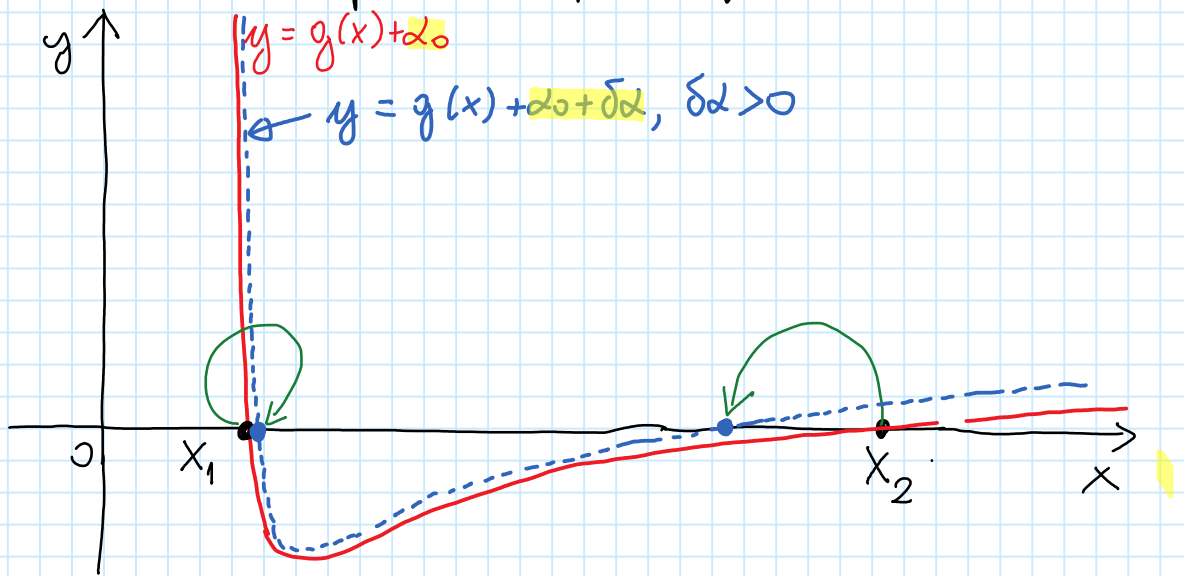
dove $x(\alpha)$ è radice esatta

$$g(x(\alpha)) + \alpha = 0$$

Prese una delle radici, vogliamo calcolare il suo numero di condizionamento.

Vediamo, per prima cosa, a livello grafico cosa succede.

Sia $\alpha_0 \in \mathbb{R}$ dato. In corrispondenza ho la radice $x(\alpha_0)$. Come varia $x(\alpha_0)$ e fronte di piccole perturbazioni $\delta\alpha$?



Dalla figura vediamo che a fronte di $\delta\alpha$ piccolo la radice $x_1(\alpha)$ varia di poco (e quindi, il problema del calcolo di $x_1(\alpha_0)$ è ben condizionato) mentre la radice $x_2(\alpha)$ varia di molto (e quindi il problema del calcolo di $x_2(\alpha)$ è mal condizionato).

Calcolo il numero di condizionamento di una delle radici $x(\alpha)$

$$k(\alpha_0) = \sup_{\delta\alpha} \frac{\frac{|\delta x|}{|x(\alpha_0)|}}{\frac{|\delta\alpha|}{|\alpha_0|}} = \sup_{\delta\alpha} \frac{|\alpha_0| \cdot |\delta x|}{|x(\alpha_0)| \cdot |\delta\alpha|}$$

Davvò calcolare la variazione δx subita dalla radice a causa della variazione $\delta\alpha$:

$$\begin{aligned} \delta x &= x(\alpha_0 + \delta\alpha) - x(\alpha_0) = \left(\begin{array}{l} \delta\alpha \text{ piccolo} \Rightarrow \\ \text{applico Taylor} \end{array} \right) \approx \\ &\approx \cancel{x(\alpha_0)} + x'(\alpha_0) \cdot \delta\alpha - \cancel{x(\alpha_0)} \\ &= x'(\alpha_0) \cdot \delta\alpha \end{aligned}$$

$$= X'(\alpha_0) \cdot \delta \alpha$$

Devo calcolare $X'(\alpha_0)$; uso il fatto che $X(\alpha)$ è radice di $g(x) + \alpha = 0$ per ogni α . Questo significa che

$$g(X(\alpha)) + \alpha = 0$$

Derivando rispetto ad α ho (supponendo $g'(X(\alpha_0)) \neq 0$)

$$g'(X(\alpha_0)) \cdot X'(\alpha_0) + 1 = 0 \Rightarrow X'(\alpha_0) = -\frac{1}{g'(X(\alpha_0))}$$

Allora sostituendo ottengo

$$\delta x = X'(\alpha_0) \delta \alpha = -\frac{1}{g'(X(\alpha_0))} \cdot \delta \alpha$$

→ derivata di g valutata nella radice $X(\alpha_0)$.

Sostituendo δx nella equazione di $\delta \alpha$ $K(\alpha_0)$ ho

$$K(\alpha_0) = \sup_{\delta \alpha} \frac{|\alpha_0| \cdot |\delta x|}{|X(\alpha_0)| \cdot |\delta \alpha|} = \sup_{\delta \alpha} \frac{|\alpha_0| \cdot |\delta \alpha|}{|g'(X(\alpha_0))| \cdot |X(\alpha_0)| \cdot |\delta \alpha|}$$

$$= \left| \frac{\alpha_0}{X(\alpha_0) \cdot g'(X(\alpha_0))} \right|$$

→ è il denominatore! Se $g'(X(\alpha_0))$ è piccolo (come nel caso del calcolo di X_2 delle figure) ho un $K(\alpha_0)$ grande (e viceversa).

NUMERI MACCHINA

Un numero reale x può sempre essere scritto nella base β ($\beta \in \mathbb{N}$, $\beta \geq 2$) come

$$x = \beta^p \sum_{k=1}^{+\infty} d_k \beta^{-k}$$

$$= \beta^p \cdot (d_1 \cdot \beta^{-1} + d_2 \cdot \beta^{-2} + d_3 \cdot \beta^{-3} + \dots)$$

dove i d_k sono le cifre ($d_k \in \{0, \dots, \beta-1\}$ sono β simboli diversi) e $p \in \mathbb{Z}$. La serie può essere finita (ossia, tutti i $d_k = 0$ da un certo punto in poi) o meno. Ad esempio, ho

$$187,12\bar{3} = 0.18712\bar{3} \cdot 10^3 =$$

$$= 10^3 \cdot (1 \cdot 10^{-1} + 8 \cdot 10^{-2} + 7 \cdot 10^{-3} + \dots)$$

È chiaro che un computer ha una quantità di memoria FINITA. Allora non posso memorizzare tutte le infinite cifre del numero precedente.

Per memorizzare i numeri al calcolatore (o, meglio, una loro approssimazione) si usano i sistemi FLOATING POINT.

DEF. [sistemi FLOATING POINT] Sia $\beta \in \mathbb{N}$, $\beta \geq 2$ (base del sistema floating point). Siano L e U due numeri interi con $L < U$. L'insieme dei numeri macchina o floating point a t cifre dopo il punto di radice è

$$\mathbb{F}(\beta, t, L, U) = \{0\} \cup \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x = \boxed{(-1)^\Delta} \beta^p \cdot \sum_{k=1}^t d_k \beta^{-k} \right\}$$

dove

-) $\Delta \in \{0, +1\}$ e dà il segno di x ;
-) $p \in \mathbb{Z}$ compreso tra L e U : $L \leq p \leq U$
Quindi, p dà i possibili valori che può assumere l'esponente. In pratica, questo numero dà il range di variazione dei numeri in $\mathbb{F}$.
-) $t \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ e rappresenta quante cifre uso dopo il punto di radice. Più è grande t e maggiore è il numero di cifre che ho a disposizione per rappresentare i numeri.

-) $d_k \in \{0, \dots, \beta-1\}$ sono le cifre. Assumiamo, per avere unicità nella rappresentazione di ogni numero, che se $d_1 \geq 1$.

Vediamo il confronto

$$\mathbb{R} \ni x = \beta^p \sum_{k=1}^{+\infty} d_k \beta^{-k}$$

$$\mathbb{F} \ni x = \beta^p \sum_{k=1}^t d_k \beta^{-k}$$

A livello di nomenclature, p è detto esponente e $\sum_{k=1}^t d_k \beta^{-k}$ è detta mantisse.

OSSERVAZIONE Abbiamo detto che $d_1 \geq 1$ per avere unicità della rappresentazione di ogni numero di $\mathbb{F}$. Infatti, se lo rimuoviamo (ossia, ommetto di poter avere $d_1=0$) e considero, ad esempio, $\mathbb{F}(\beta, t, L, U)$ ho

$$1 = 10^{\overset{p}{1}} \cdot 0, \underset{\substack{d_1 \\ 1}}{\underset{\substack{d_2 \\ 0}}{\underset{\substack{d_3 \\ 0}}{100}}} = 10^2 \cdot 0,010 = 10^3 \cdot 0,001.$$

I numeri con $d_1 \geq 1$ sono detti **numeri macchina NORMALIZZATI**.

Ci sono anche i numeri macchina DENORMALIZZATI che si ottengono rimuovendo per il solo caso $p=L$ il vincolo che $d_1 \geq 1$.

PROP. L'insieme $\mathbb{F}(\beta, t, L, U)$ soddisfa le seguenti proprietà

- i) $\mathbb{F} \subset \mathbb{R}$
- ii) $x \in \mathbb{F} \Rightarrow -x \in \mathbb{F}$
- iii) $\mathbb{F}$ contiene esattamente

$$\text{card}(\mathbb{F}) = 1 + 2(U-L+1)(\beta-1)\beta^{t-1}$$

numeri reali.

iv) Considerando solo i valori positivi di $\mathbb{F}$, $\mathbb{F}$ ha un valore minimo

$$X_{\min} = \beta^L \cdot \beta^{-1} = \beta^{L-1}$$

ed un valore massimo

$$X_{\max} = \beta^U (1 - \beta^{-t})$$

perché $d_1 \geq 1$

3 cifre: 0.000 (più piccolo)
 $1 - 10^{-3} = 1 - 0.001 = 0.999$ (più grande)

ESEMPIO Costruiamo $\mathbb{F}(\underset{\beta}{10}, \underset{t}{1}, \underset{L}{-1}, \underset{U}{2})$.

$p = -1$	$p = 0$	$p = 1$	$p = 2$
$10^{-1} \cdot 1 \cdot 10^{-1} = 10^{-2}$	$10^0 \cdot 1 \cdot 10^{-1} = 10^{-1}$	$10^1 \cdot 1 \cdot 10^{-1} = 1$	$10^2 \cdot 1 \cdot 10^{-1} = 10$
$10^{-1} \cdot 2 \cdot 10^{-1} = 2 \cdot 10^{-2}$	$10^0 \cdot 2 \cdot 10^{-1} = 2 \cdot 10^{-1}$	$10^1 \cdot 2 \cdot 10^{-1} = 2$	$10^2 \cdot 2 \cdot 10^{-1} = 20$
$10^{-1} \cdot 3 \cdot 10^{-1} = 3 \cdot 10^{-2}$	$10^0 \cdot 3 \cdot 10^{-1} = 3 \cdot 10^{-1}$	$10^1 \cdot 3 \cdot 10^{-1} = 3$	$10^2 \cdot 3 \cdot 10^{-1} = 30$
$10^{-1} \cdot 4 \cdot 10^{-1} = 4 \cdot 10^{-2}$	$4 \cdot 10^{-1}$	$= 4$	$= 40$
$10^{-1} \cdot 5 \cdot 10^{-1} = 5 \cdot 10^{-2}$	$5 \cdot 10^{-1}$	$= 5$	$= 50$
$\cdot 6 = 6 \cdot 10^{-2}$	$6 \cdot 10^{-1}$	$= 6$	$= 60$
$\cdot 7 = 7 \cdot 10^{-2}$	$7 \cdot 10^{-1}$	$= 7$	$= 70$
$\cdot 8 = 8 \cdot 10^{-2}$	$8 \cdot 10^{-1}$	$= 8$	$= 80$
$\cdot 9 = 9 \cdot 10^{-2}$	$9 \cdot 10^{-1}$	$= 9$	$= 90$

In totale ho $1 + 2 \cdot 36 = 73$ numeri. Notare che

- o) Non sono equispaziati! Lo sono solo all'interno delle stesse decade!
- o) Ho un valore minimo ed uno massimo.
- o) Occorrono posizioni DISTINTE dell'axe reale che

posiamo rappresentare così

