Prof. Lidia Angeleri, Prof. Francesca Mantese
Università di Verona, 2014/2015
Corso di Laurea in Matematica Applicata

Esercizi per il Corso di ALGEBRA

Foglio 3
21 ottobre 2014

1. Si consideri il *gruppo diedrale* D_4 delle isometrie del quadrato (cioè dei movimenti rigidi del piano che trasformano il quadrato in se stesso), rispetto alla composizione.
   (a) Si verifichi che D_4 è un gruppo di ordine 8 non abeliano
   (b) Si dimostri che esistono due element $\sigma, \tau \in D_4$ tali che $\sigma^4 = 1 = \tau^2$ e $\tau\sigma = \sigma^3\tau$.
   (c) Si trovino tutti i sottogruppi di D_4.
   (d) Si verifichi che D_4 è risolubile, trovando un catena di sottogruppi del tipo descritto in Filo Rosso, 5.3 punto (2).

   (*8 punti*)

2. (a) Si decida se $\overline{25}$ e $\overline{20}$ sono elementi invertibili o divisori di zero in $\mathbb{Z}/144\,\mathbb{Z}$ e si calcoli eventualmente il loro elemento inverso.
   (b) Si calcoli $\overline{11}^{\,49}$ in $\mathbb{Z}/144\,\mathbb{Z}$.
   (c) Si calcoli l'ordine di ogni elemento nel gruppo moltiplicativo $(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}^*, \cdot\,)$ composto dagli elementi invertibili dell'anello $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$.
   (d) Si dimostri che $(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}^*, \cdot\,)$ è un gruppo ciclico

   (*8 punti*)

3. Sia R un anello commutativo e sia $N = \{x \in R | x^n = 0 \text{ per qualche intero } n\}$
   (a) Dimostrare che N è un ideale di R.
   (b) Se in $\overline{R} = R/N$ si ha $\overline{x}^m = 0$ per un certo m, allora $\overline{x} = 0$.

   (6 punti)

4. Sia R un anello commutativo. Un elemento $e \in R$ si dice *idempotente* se $e^2 = e$. Sia $e \in R$ un elemento idempotente. Si dimostri che:
   (a) $1 - e$ è un elemento idempotente.
   (b) $R = (e) + (1 - e)$ e $(e) \cap (1 - e) = \{0\}$, dove (e) è l'ideale generato da e e $(1 - e)$ è l'ideale generato da $1 - e$.
   (c) Ogni elemento $r \in R$ si scrive in modo unico come $r = x + y$, con $x \in (e)$ e $y \in (1 - e)$
   (d) Siano I e J due ideali tali che $I + J = R$ e $I \cap J = \{0\}$. Si dimostri che esistono due elementi idempotenti $e, f \in R$ tali che $1 = e + f$, $I = (e)$ ed $J = (f)$.

   (8 punti)

5. (a) Si dimostri che ogni gruppo di ordine p^n ha centro non banale (Sugg: si usi l'equazione delle classi)
   (b) Sia G un gruppo di ordine 8. Si dimostri che G è risolubile.

   (**)

Consegna: martedì 28 ottobre durante le esercitazioni.