Differential geometry and Topology

Note del corso di — Lecture notes

TOPOLOGIA E GEOMETRIA DIFFERENZIALE

Prof. M. Spera — a.a. 2009/10 — Laurea magistrale in Matematica / Master degree in Mathematics

D.I. - Università di VERONA

Lezione I
Lecture I

V spazio vettoriale (su $\underbrace{\mathbb{R} \text{ o } \mathbb{C}}_{K}$, per fissare le idee)
vector space

★ V^* : spazio vettoriale **duale** (dual) : [elementi (vettori) di V^* : 1-forme (lineari, o algebriche)] (1-forms)

$$V^* = \{ f : V \to K \ / \ f \text{ lineare} \} \quad \text{i.e.}$$
(linear)

$$f(\underset{\substack{\cap\\ V}}{\overset{\substack{K\\ \downarrow}}{\alpha} v} + \overset{\substack{K\\ \downarrow}}{\beta} \underset{\substack{\cap\\ V}}{w}) = \underbrace{\alpha \underset{\substack{\cap\\ K}}{f(v)} + \beta \underset{\substack{\cap\\ K}}{f(w)}}_{\substack{\cap\\ K}}$$

Exercise

Esercizio : V^* è effettivamente (indeed) uno spazio vettoriale su K : si definisca

$$(\underset{\substack{\cap\\ V^*}}{\alpha \cdot f} + \underset{\substack{\cap\\ V^*}}{\beta \cdot g})(\underset{\substack{\cap\\ V}}{v}) := \alpha \cdot f(v) + \beta \cdot g(v)$$

in K

da definirsi tramite (defined via)

Prop Sia $\dim_K V = n$ (dim. finita) finite dimensional vector space

È $\dim_K V^* = n$

Dim. Sia $(e_1 \dots e_n)$ una base di V. Consideriamo le forme duali $\{e_i^*\}_{i=1..n}$ così definite:

$$e_i^*(e_j) = \delta_{ij} \quad (\delta \text{ di Kronecker}) \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i=j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

[nota: è sufficiente definire $f \in V^*$ su una base di V, in virtù della linearità: $f(v) = f(\sum \alpha_i e_i) = \sum \alpha_i f(e_i)$

"estensione per linearità"; si osservi che $e_i^*(v) = \alpha_i$, cioè e_i^* "pesca" la i-esima componente di un vettore espresso come c. l. dei vettori della base $(e_1 .. e_n)$
picks up linear combination

Si ha subito $f = \sum f(e_i) e_i^*$: infatti $f(v) = \sum \alpha_i f(e_i)$

e $\left(\sum_i f(e_i) e_i^*\right)(v) = \sum_{i,j} f(e_i) \alpha_j e_i^*(e_j) = \sum_{i,j} f(e_i) \alpha_i \delta_{ij}$

$= \sum \alpha_i f(e_i) = f(v)$. $\Rightarrow$ gli e_i^* generano V^*.
generate

gli e_i^* sono l. i.: infatti, se $\sum \beta_i e_i^* = 0$,
linearly independent. indeed

si ha, $\forall v \in V$ $(\sum \beta_i e_i^*)(v) = 0$; scelto $v = e_j$,

è $0 = \sum_i \beta_i e_i^*(e_j) = \sum_i \beta_i \delta_{ij} = \beta_j \Rightarrow$

$\beta_j = 0 \ \forall j = 1 \dots n$, da cui l'asserto

La base $(e_1^*, \dots e_n^*)$ è detta duale della base data $(e_1, \dots e_n)$.

si ricordi ancora: $e_k^*(\sum \alpha_i e_i) = \alpha_k$

Si ha allora $V \underset{\text{iso}}{\cong} V^*$, ma l'isomorfismo non è canonico (dipende dalla scelta della base)

canonical

Si può considerare ovviamente $V^{**} := (V^*)^*$ (biduale di V). In dim. finita, esso è canonicamente isomorfo a V [ovvero, si può costruire un isomorfismo indipendente dalla scelta di una base:

dato $v \in V$, si definisca

$v^{**} \in V^{**}$ come segue:

$$v^{**}(\underset{\substack{\cap \\ V^*}}{f}) := f(v) \qquad (f \in V^*)$$

l'applicazione $V \ni v \longmapsto v^{**} \in V^{**}$

è lineare e iniettiva, e $\dim V^{**} = n$, pertanto è anche suriettiva (per il teorema N+R) e quindi è un isomorfismo.

Esempi

1. $\mathbb{R}^n$, $(e_1 \dots e_n)$ base canonica

$$\begin{array}{c} \mathbb{R}^n \\ \shortparallel \\ \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{x} \right\}_{x_i \in \mathbb{R}} \end{array} \qquad e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow i$$

base duale di $(\mathbb{R}^n)^* \cong \mathbb{R}^n$

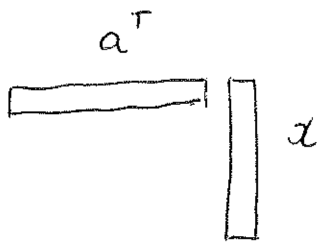
$$e_i^* = (0\ 0 \dots \underset{\substack{\uparrow \\ i}}{1}\ 0 \dots 0)$$

$$a = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

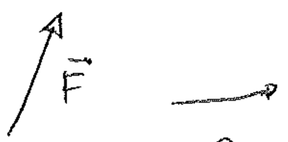
$$(\mathbb{R}^n)^* = \{ \overbrace{(a_1 \dots a_n)}^{a^T} \}_{a_i \in \mathbb{R}}$$

$$\updownarrow$$

$$f_a(x) = a^T x = \sum a_i x_i$$



2. $\vec{F}$ forza / force $\vec{a}$ spostamento / displacement (nello spazio vettoriale geometrico)



lavoro: $\vec{F} \cdot \vec{a} = \|\vec{F}\| \cdot \|\vec{a}\| \cos\vartheta$

prodotto da $\vec{F}$

↑ prod. scalare elementare

$l = l_{\vec{F}}$ è una 1-forma

3. ☆ Il differenziale

differential

il tutto si generalizza, v. sotto

Sia $f : \underset{\text{aperto}}{U \subset \mathbb{R}^n} \to \mathbb{R}$, di classe C^1, per fissare le idee. Sia $x_0 \in U$, $x_0 + h \in U$

operatore lineare

Allora
$$\boxed{f(x_0+h) - f(x_0) = df|_{x_0}\, h + o(h)}$$

$$\left[\frac{o(h)}{\|h\|} \xrightarrow{h \to 0} 0 \right]$$

differenziale di f in x_0

$$df|_{x_0} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$h \longmapsto df|_{x_0} \cdot h$$

abuso di notazione

$$\boxed{\nabla f^t} \, \boxed{h} = \square$$

è un vettore duale, i.e. una 1-forma

Concretamente, è rappresentato dalla matrice $1 \times n$ (matrix)

$$df|_{x_0} = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \; \cdots \; \frac{\partial f}{\partial x_n} \right) \quad \left(= (\nabla f)^t \right)$$

gradiente

⚠ Il concetto di gradiente, a rigore, è metrico

Inciso   Aside

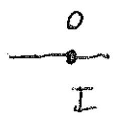
☆ Differenziale secondo Fréchet

$f : U \subset V \to W$ spazi vettoriali normati (normed)

$$\underset{a+h}{f(x)} - f(a) = T_a \cdot h + o(h) \qquad \frac{\|o(h)\|_W}{\|h\|_V} \to 0 \text{ se } h \to 0$$

se $V = \mathbb{R}^n$, $W = \mathbb{R}^m$, T_a è rapp. dalla matrice jacobiana, $m \times n$

Importante

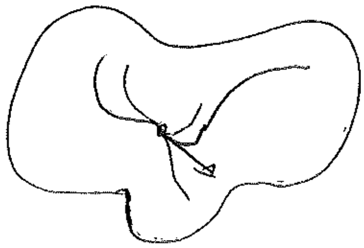


Sia $\quad x = x(t)$

$x(0) = x_0$

$\dot{x}(0) = h \overset{\parallel}{} \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix}$

$I \ni 0$ velocità velocity speed

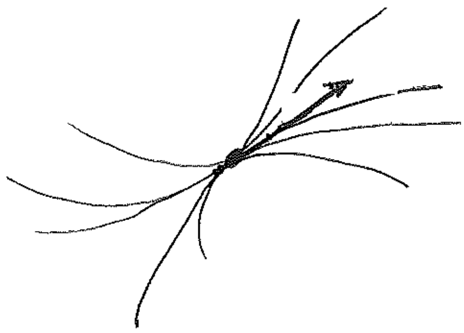


Sia $F = F(t) = f(x(t)) \quad (= (f \circ x)(t))$

È anche $\quad df\big|_{x_0} h = \dfrac{dF}{dt}(0)$

$$\left(= \sum \overset{\circ}{f}_{x_i} h_i \right), \qquad \overset{\circ}{f}_{x_i} \equiv \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

★ indipendentemente da $x = x(t)$ purché abbia la stessa velocità h in x_0



4. L'integrale

Sia $V = \mathcal{C}_c(\mathbb{R})$.

funzioni continue
a supporto compatto, a valori reali

Sia $\int_{\mathbb{R}} : \quad V \ni f \longmapsto \int_{\mathbb{R}} f \in \mathbb{R}$

integrale di Riemann

non richiede formalmente
l'introduzione di una misura, basta la misura L_0
standard dei plurirettangoli

$\int_{\mathbb{R}}$ è un funzionale lineare (e continuo, v. corso di A.F.)

[Esso è indotto (Teorema della rappresentazione di Riesz)
dalla misura di Lebesgue]

(scalar, or inner product)

Sia $K = \mathbb{R}$, e $\langle\ ,\ \rangle$ un prodotto scalare (interno) su V

(si parla di spazio vettoriale euclideo $(V, \langle\ ,\ \rangle)$)
Euclidean

$\langle\ ,\ \rangle$ forma $\underbrace{\text{bilineare}}^{1}$ $\underbrace{\text{simmetrica}}^{2}$ $\underbrace{\text{definita positiva}}^{3}$: bilinear, symmetric, positive definite

$$\langle\ ,\ \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$$

linear in both arguments

1. lineare in entrambi gli argomenti (bilinearità)
2. $\langle v, w \rangle = \langle w, v \rangle$ (simmetria)
3. $\langle v, v \rangle \geq 0$ e vale $= \iff v = \underline{0}$ (vettore nullo)

$\langle\ ,\ \rangle$ induce isomorfismi tra V e V^*

(isomorfismi $\underline{\text{musicali}}$; "innalzamento e abbassamento di indici"
musical; "index raising & lowering"

"bemolle" (flat)

$$\begin{array}{ccccc} & & V & & V^* \\ & & \cup & & \cup \\ \flat & : & v & \longmapsto & \langle v, \cdot \rangle =: v^\flat \end{array}$$

$(\flat^{-1} = \sharp : V^* \to V)$

diesis
sharp

Questo è il $\underline{\text{teorema}}$ della $\underline{\text{rappresentazione}}$ (Riesz)

In concreto, sia $\langle\ ,\ \rangle$ rappresentato, rispetto ad una base $(e_1 \dots e_n)$ di V, dalla matrice $G = (g_{ij})$, $g_{ij} = \langle e_i, e_j \rangle$

G consente di ricostruire $\langle\,,\,\rangle$:
reconstruct

se $v = \sum v^i e_i$, $w = \sum w^j e_j$ $\qquad v \leftrightarrow \begin{pmatrix} v^1 \\ \vdots \\ v^n \end{pmatrix}$

$$\langle v, w \rangle = \sum v^i w^j \underbrace{\langle e_i, e_j \rangle}_{g_{ij}} \qquad w \leftrightarrow \begin{pmatrix} w^1 \\ \vdots \\ w^n \end{pmatrix}$$

(bilinearità)

abuso di notazione

$$= \sum_{i,j} g_{ij} v^i w^j = v^T G w$$

viceversa, data G e una base di V, costruisco $\langle\,,\,\rangle$ tramite

ciò vale per una forma bilineare qualsiasi.

Nel nostro caso G è simmetrica, i.e. $G = G^t$

$(g_{ij} = g_{ji})$ e <u>definita positiva</u>

$$\|v\|^2 = \langle v, v \rangle = v^t G v \geq 0 \quad (e = 0 \Leftrightarrow v = 0)$$

[G è simmetrica, dunque ortogonalmente diagonalizzabile, i.e. possiede una base ortonormale di autovettori. I suoi autovalori, reali, sono necessariamente positivi (CNES)]

convenzione di Einstein: si somma sugli indici ripetuti

$$v = (v^j) \xmapsto{\;b\;} (g_{ij} v^j) \equiv (v_i)$$

$$\langle v, w \rangle = v^t G w = (\underset{\overset{\|}{G}}{G^t} v)^t w = (G v)^t w$$

Descriviamo $\# = b^{-1}$ anche così:

Sia $G^{-1} = (g^{ij})$ $\qquad g^{ij} g_{jk} = \delta^i_k \;(= \delta_{ik})$

$$(v_i) \xmapsto{\#} (g^{ij} v_j) \equiv v^i$$

$$G^{-1}\, G = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} = I_n$$

In astratto: $(v_i) \leftrightarrow \tilde{v}$ $\qquad \langle v, w \rangle = \tilde{v}^t w = v^t G w = (Gv)^t w$

$$\tilde{v} = G v$$

$$\Rightarrow \quad \underset{(v^i)}{v} = G^{-1} \underset{(v_i)}{\tilde{v}}$$

4 Teorema della rappresentazione (esistenza di $\mathcal{H}$)

[vale in uno spazio di Hilbert e caratterizza i funzionali lineari e continui

Sia $(V, \langle , \rangle)$ uno spazio vettoriale euclideo $\dim_{\mathbb{R}} V = n$

Sia $\ell \in V^*$

Allora $\exists!\ x \in V$ t. che, $\forall v \in V$, si abbia

$$\ell(v) = \langle x, v \rangle$$

[vic. $\forall x \in V$, $\ell_x(v) := \langle x, v \rangle$ definisce un f. lineare [ovvio]]

Dim. Sia $(e_1 \ldots e_n)$ una base ortonormale di V: $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$ $i,j = 1 \ldots n$

[si può costruire tramite G-S (Gram-Schmidt) a partire da una base qualsiasi]

Si ha: $v = \sum_{i=1}^{n} v_i e_i$. Pertanto Thus

univ. determinati
uniquely determined

$$\ell(v) = \sum_{i=1}^{n} v_i \underbrace{\ell(e_i)}_{= x_i}$$

Il vettore $\quad x := \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$

è il vettore cercato, ed è nec. unico:
sought for

$$\langle x, v \rangle = \langle \sum x_i e_i , \sum v_j e_j \rangle = \sum_{i,j} x_i v_j \underbrace{\langle e_i, e_j \rangle}_{\delta_{ij}}$$

$$= \sum_i x_i v_i .$$