1) Studiare, se $\exists$, $\lim_{x\to 0} f(x)$ e se f è continua in $x=0$ ove

a) $f(x) = \sqrt{-x^5-x^4} = \sqrt{-x^4(x+1)}$

b) $f(x) = \dfrac{1-\cos x}{\sin x}$

Def. Sia $f: A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in A$

Se x_0 è un punto isolato di $A \Rightarrow f$ è continua in x_0

Se x_0 è di accumulazione per $A \Rightarrow f$ è continua in x_0 se

$\exists \lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

a) Sia $f(x) = \sqrt{-x^4(x+1)}$

$A = \{x \in \mathbb{R} : x \leq -1\} \cup \{0\}$

$x_0 = 0$ è un punto isolato di $A \Rightarrow \nexists \lim_{x\to 0} f(x)$ e f è continua in $x_0 = 0$

b) Sia $f(x) = \dfrac{1-\cos x}{\sin x}$

$A = \{x \in \mathbb{R} : x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}\} = \mathbb{R} \setminus \{k\pi \,;\, k \in \mathbb{Z}\}$

$0 = x_0 \notin A \Rightarrow f$ non è continua in $x_0 = 0$

x_0 è di accumulazione per A

$$\frac{1-\cos x}{\sin x} = \frac{1-\cos x}{x^2} \cdot \frac{x}{\sin x} \cdot x$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \qquad \lim_{x\to 0} x = 0 \qquad \lim_{x\to 0} \frac{1}{\frac{\sin x}{x}} = 1$$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} \cdot \frac{x}{\sin x} \cdot x = 0$$

EX1 file D