ESERCIZIO Calcolare, con Cavalieri-Simpson con $m=2$ intervalli

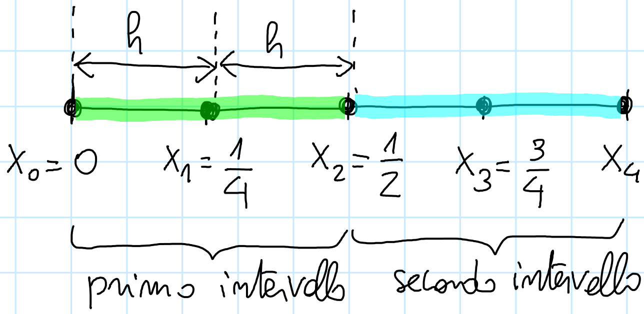
$$\int_0^1 (4x^3-3x^2+1)\,dx.$$

Dato che la funzione integranda $f(x)=4x^3-3x^2+1$ è un polinomio di grado $n=3$, Cavalieri-Simpson dà il risultato esatto con m qualsiasi; perciò, è

$$I_{cs,c}^{(2)} = \int_0^1 (4x^3-3x^2+1)\,dx = \left[x^4-x^3+x\right]_0^1 =$$

$$= (1^4-1^3+1)-(0^4-0^3+0) = 1.$$

Sviluppando l'integrale con la formula di Cavalieri-Simpson si ottiene



$$h=\frac{x_4-x_0}{2m}=\frac{1-0}{2\cdot 2}=$$

$$=\frac{1}{4}.$$

$$I_{cs,c}^{(2)} = \frac{h}{3}\left\{f(x_0)+4\Big(f(x_1)+f(x_3)\Big)+2f(x_2)+f(x_4)\right\}=$$

$$=\frac{1/4}{3}\left\{4\cdot 0^3-3\cdot 0^2+1+4\left[4\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^3-3\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^2+1+\right.\right.$$

$$\left.+4\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^3-3\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^2+1\right]+2\left[4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3-3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2+1\right]+$$

$$\left.+4\cdot 1^3-3\cdot 1^2+1\right\}=1.$$

MIGLIORAMENTO DELLE APPROSSIMAZIONI DI $I_{T,c}^{(m)}$, $I_{cs,c}^{(m)}$.

Vogliamo calcolare $I=\int^b f(x)\,dx$ con f continua in $[a,b]$.

Vogliamo calcolare $I = \int_a^b f(x)\,dx$ con f continua in $[a,b]$.

Usiamo, allo scopo, la formula dei trapezi composta.
Si procede calcolando $I_{T,C}^{(m)}$ per diversi valori di m del tipo $m = 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, \dots$. Immaginiamo di avere, per un certo m,

$$I_{T,C}^{(m)} \quad \text{e} \quad I_{T,C}^{(2m)}$$

Da questi voglio ottenere una stima più buona di I.
Sappiamo che

$$\begin{cases} I = I_{T,C}^{(m)} + E_{T,C}^{(m)} \\ I = I_{T,C}^{(2m)} + E_{T,C}^{(2m)} \\ E_{T,C}^{(m)} \approx 4\, E_{T,C}^{(2m)} \end{cases}$$

sistema di 3 equazioni in 3 incognite I, $E_{T,C}^{(m)}$, $E_{T,C}^{(2m)}$.

Elimino gli errori e ricavo I:

$$\begin{cases} I = I_{T,C}^{(m)} + 4\, E_{T,C}^{(2m)} \\ I = I_{T,C}^{(2m)} + E_{T,C}^{(2m)} \end{cases}$$

$$4I - I = 4\, I_{T,C}^{(2m)} + \cancel{4\, E_{T,C}^{(2m)}} - \left[I_{T,C}^{(m)} + \cancel{4\, E_{T,C}^{(2m)}} \right]$$

$$\boxed{I = \frac{4\, I_{T,C}^{(2m)} - I_{T,C}^{(m)}}{3}}$$

Questa relazione dà un buon risultato se la formula

$E_{T,C}^{(m)} \approx 4\, E_{T,C}^{(2m)}$ è ben verificata (cioè, il fattore è effettivamente 4).

Analogamente, si può ripetere il tutto per Cavalieri-Simpson composta; abbiamo

Analogamente, si può ripetere il tutto per Cavalieri-Simpson composta; abbiamo

$$
\begin{cases}
I = I_{CS,c}^{(m)} + E_{CS,c}^{(m)} \\
I = I_{CS,c}^{(2m)} + E_{CS,c}^{(2m)} \\
E_{CS,c}^{(m)} \approx 16\, E_{CS,c}^{(2m)}
\end{cases}
$$

Procedendo come prima si trova

$$
\boxed{I = \frac{16\, I_{CS,c}^{(2m)} - I_{CS,c}^{(m)}}{15}}
$$

che vale tanto più quanto $E_{CS,c}^{(m)} / E_{CS,c}^{(2m)}$ è prossimo a 16 (ossia, quanto $f^{(4)}(x)$ è costante nell'intervallo di integrazione $[a,b]$).

Questi fatti possono essere organizzati e generalizzati nel metodo di ROMBERG.

METODO DI ROMBERG

Si consideri la formula dei trapezi composta con $m = 1, 2, 4, 8, 16, \ldots$ intervalli. Costruisco, a partire da $I_{T,c}^{(m)}$, la tabella seguente:

$$I_{T,c}^{(1)}$$

$$I_{T,c}^{(2)} \quad \frac{4 I_{T,c}^{(2)} - I_{T,c}^{(1)}}{3} = I_{CS,c}^{(1)}$$

$$I_{T,c}^{(4)} \quad \frac{4 I_{T,c}^{(4)} - I_{T,c}^{(2)}}{3} = I_{CS,c}^{(2)} \quad \underbrace{\frac{16\, I_{CS,c}^{(2)} - I_{CS,c}^{(1)}}{15}}_{\alpha}$$

$$(8) \quad (4) \quad \underbrace{16\, I_{CS,c}^{(4)} - I_{CS,c}^{(2)}}_{\beta} \quad \frac{64\beta - \alpha}{63}$$

$$\frac{4 I_{T,c}^{(8)} - I_{T,c}^{(4)}}{3} = I_{CS,c}^{(4)} \longrightarrow \boxed{\frac{16 I_{CS,c}^{(4)} - I_{CS,c}^{(2)}}{15}}\ \beta \longrightarrow \frac{64\beta - \alpha}{63}$$

$$\frac{4 I_{T,c}^{(16)} - I_{T,c}^{(8)}}{3} = I_{CS,c}^{(8)} \longrightarrow \frac{16 I_{CS,c}^{(8)} - I_{CS,c}^{(4)}}{15}$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots$$

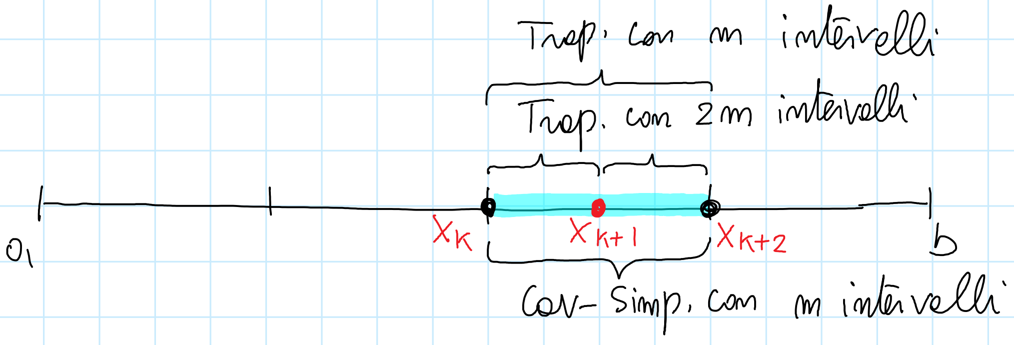
Si dimostra che la terza colonna converge a I più rapidamente delle precedenti per cui può essere utilizzata per ottenere una migliore stima dell'integrale. L'idea è

$$\begin{array}{l} I_{T,c}^{(1)},\ I_{T,c}^{(2)} \longrightarrow I_{CS,c}^{(1)} \\ I_{T,c}^{(2)},\ I_{T,c}^{(4)} \longrightarrow I_{CS,c}^{(2)} \end{array} \longrightarrow \text{migliore stima dell'integrale.}$$

La diagonale superiore (elementi cerchiati in azzurro) converge anch'essa all'integrale I.

OSSERVAZIONE Vediamo che

$$I_{TC}^{(m)},\ I_{TC}^{(2m)} \longrightarrow \frac{4 I_{TC}^{(2m)} - I_{TC}^{(m)}}{3} = I_{CS,c}^{(m)}$$



$$h = x_{k+1} - x_k = x_{k+2} - x_{k+1}$$

Guardando solo l'intervallo evidenziato, abbiamo

$$\left(\frac{4\, I_{T,c}^{(2m)} - I_{T,c}^{(m)}}{3} \right)_{\substack{\text{solo intervallo} \\ (x_k,\, x_{k+2})}} =$$

$$= \frac{1}{3} \Big\{ \overbrace{\cancel{4}^{2} \left[f(x_k) + 2 f(x_{k+1}) + f(x_{k+2}) \right] \frac{h}{\cancel{2}}}^{\text{trapezi su } 2m \text{ intervalli}} - \overbrace{\left[f(x_k) + f(x_{k+2}) \right] \frac{\cancel{2} h}{\cancel{2}}}^{\text{trapezi su } m \text{ intervalli}} \Big\}$$

$$= \frac{h}{3} \Big\{ f(x_k) + 4 f(x_{k+1}) + f(x_{k+2}) \Big\}$$ che è Cav-Simp. applicata all'intervallo $(x_k,\ x_{k+2})$.

ESERCIZIO Sia $I = \int_1^2 \ln(x)\, dx$

Calcolare, col metodo di Romberg con $m=4$, la miglior stima possibile dell'integrale ed il corrispondente errore.

$$\begin{array}{ccccc}
\boxed{\begin{array}{c} I_{T,c}^{(1)} \\ I_{T,c}^{(2)} \\ I_{T,c}^{(4)} \end{array}} & \begin{array}{c} \searrow \\ \rightarrow \\ \searrow \\ \rightarrow \end{array} & \begin{array}{c} I_{CS,c}^{(1)} \\ \\ I_{CS,c}^{(2)} \end{array} & \begin{array}{c} \searrow \\ \rightarrow \end{array} & \text{migliore stima} \quad [\,0.386287892\,] \\
\uparrow & & & & \\
\text{calcolare} & & & &
\end{array}$$

ESERCIZIO Determinare, per $\alpha > 0$, il valore minimo di $K_\infty(A)$ per

$$\begin{pmatrix} \alpha & 3\alpha \end{pmatrix}$$

per

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 3\alpha \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ricordiamo che $K_\infty(A) = \|A^{-1}\|_\infty \cdot \|A\|_\infty$ e che

$$\|A\|_\infty = \max_{i=1,\dots,n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \qquad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Calcolo A^{-1}:

$$\left(A \;\vdots\; I_2 \right) = \left(\begin{array}{cc:cc} \alpha & 3\alpha & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cc:cc} 1 & 3 & \frac{1}{\alpha} & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{cc:cc} 1 & 3 & \frac{1}{\alpha} & 0 \\ 0 & -2 & -\frac{1}{\alpha} & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cc:cc} 1 & 3 & \frac{1}{\alpha} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2\alpha} & -\frac{1}{2} \end{array}\right) \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{cc:cc} 1 & 0 & -\frac{3}{2\alpha} + \frac{1}{\alpha} & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2\alpha} & -\frac{1}{2} \end{array}\right) \quad = A^{-1}$$

Allora è

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2\alpha} & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2\alpha} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

per cui risulta

$$\|A^{-1}\|_\infty = \max\left\{ \left|-\frac{1}{2\alpha}\right| + \left|\frac{3}{2}\right|, \left|\frac{1}{2\alpha}\right| + \left|-\frac{1}{2}\right| \right\} =$$

$$= \max\left\{ \frac{1}{2\alpha} + \frac{3}{2}, \frac{1}{2\alpha} + \frac{1}{2} \right\} = \frac{1}{2\alpha} + \frac{3}{2}$$

Inoltre per $\|A\|_\infty$ risulta

Inoltre per $\|A\|_\infty$ risulta

$$\|A\|_\infty = \max\left\{ |\alpha| + |3\alpha|,\ |1| + |1| \right\} \overset{\alpha>0 \Rightarrow |\alpha|=\alpha}{=} \max\left\{ 4\alpha, 2 \right\}$$

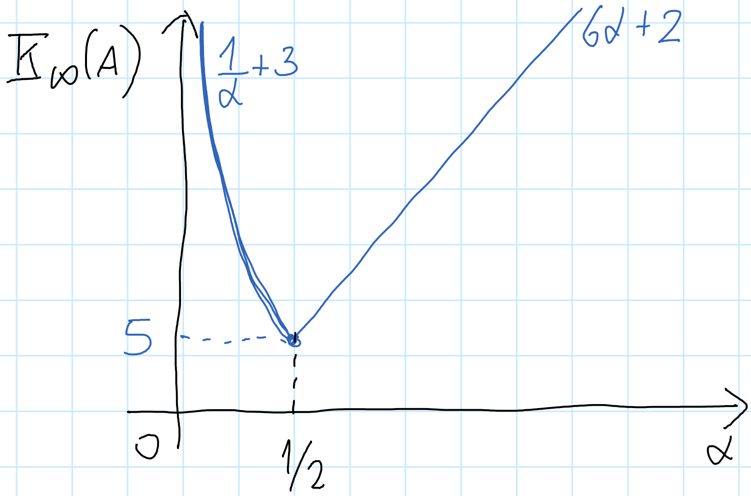
Perciò, è

$$K_\infty(A) = \|A^{-1}\|_\infty \cdot \|A\|_\infty = \left(\frac{1}{2\alpha} + \frac{3}{2}\right) \cdot \max\left\{4\alpha, 2\right\} =$$

$$= \begin{cases} \left(\frac{1}{2\alpha} + \frac{3}{2}\right) \cdot 4\alpha, & 4\alpha \geq 2 \Leftrightarrow \alpha \geq 2/4 \\ \left(\frac{1}{2\alpha} + \frac{3}{2}\right) \cdot 2, & 4\alpha < 2 \Leftrightarrow \underbrace{0 < \alpha}_{\text{ipotesi}} < \frac{2}{4} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 2 + 6\alpha, & \alpha \geq 1/2 \\ \frac{1}{\alpha} + 3, & 0 < \alpha < \frac{1}{2} \end{cases}$$

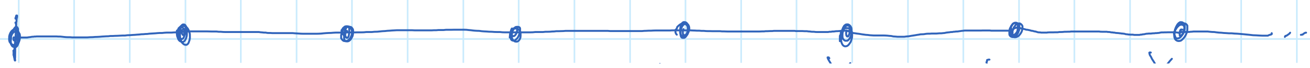
Disegniamo $K_\infty(A)$:



Perciò, $K_\infty(A)$ è minimo per $\alpha = 1/2$ dove assume il valore 5.

LABORATORIO

Metodo trapezi e di Cav-Simps. composto.



$x_0 \quad x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4 \quad x_5 \quad x_6 \quad x_7 \quad \dots$

	1	2	3	4	5	6	7	8	
xi	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	...

$$I_{T,c}^{(m)} = \frac{h}{2}\left[f(x_0) + 2 \sum_{\substack{i \\ \text{interni}}} f(x_i) + f(x_m) \right]$$

x_m → ultimo nodo

MATLAB

f(xi(1))   2 sum(f(xi(2 : end-1)))   f(xi(end))

CAV-SIMPS.

$x_0 \quad x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4 \quad x_5 \quad x_6 \quad x_7 \quad x_8$

1	2	3	4	5	6	7	8	9	
x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	xi

$$I_{CS,c}^{(m)} = \frac{h}{3}\left\{ f(x_0) + 4 \sum_{\substack{\text{interni} \\ \text{dispari}}} f(x_i) + 2 \sum_{\substack{\text{interni} \\ \text{pari}}} f(x_i) + f(x_m) \right\}$$

x_m → ultimo

MATLAB

f(xi(1))   sum(f(xi(2:2:end-1)))   f(xi(end))

sum(f(xi(3:2:end-2)))

sum(f(xi(3:2:end-2)))

file tp.m

SCRIPT PRINCIPALE

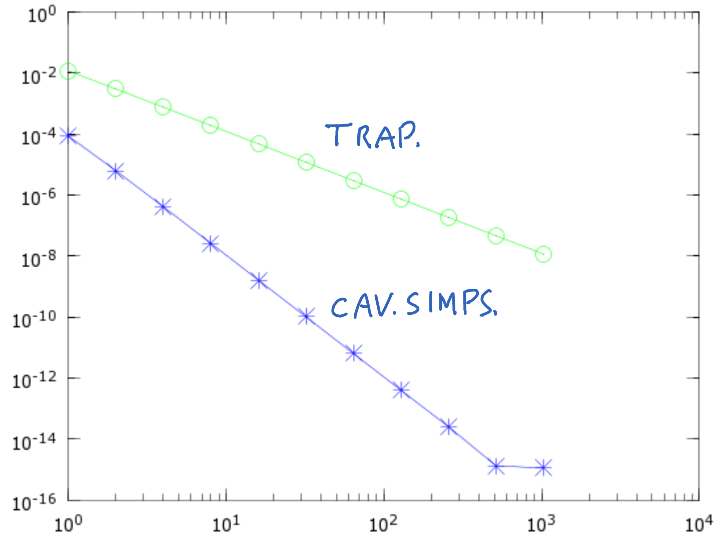
```
% script per integrazione
% con trapezi e Cavalieri-Simpson
% composta.
% OBIETTIVO: disegnare l'andamento
% del valore assoluto dell'errore
% |IT(m)-IVero| al variare di m
% e calcolare il rapporto tra due
% errori consecutivi

% definire la funzione da integrare
f = inline('sqrt(x)');

% definisco gli estremi di integrazione
a = 1;
b = 2;
iVero = (2/3)*( b^(3/2) - a^(3/2) );

% definisco il vettore che contiene
% i valori di m=1,2,4,8,16,...
mVett = 2.^(0:10);

iVettTP = zeros( length(mVett), 1 );
iVettCS = zeros( length(mVett), 1 );
for k=1:length(mVett)
    % applico formula trapezi composta
    % con m = mVett(k) intervalli
    m = mVett(k);
    iVettTP(k) = tp(f,a,b,m);
    iVettCS(k) = cs(f,a,b,m);
end

% disegno l'andamento dell'errore
% in scala log log
loglog(mVett,abs(iVettTP-iVero),'o-g')
hold on
loglog(mVett,abs(iVettCS-iVero),'*-b')
hold off

% calcolo i rapporti tra errori
% consecutivi
errTP = abs(iVettTP-iVero);
rapTP = errTP(2:end)./errTP(1:end-1)

errCS = abs(iVettCS-iVero);
rapCS = errCS(2:end)./errCS(1:end-1)
```

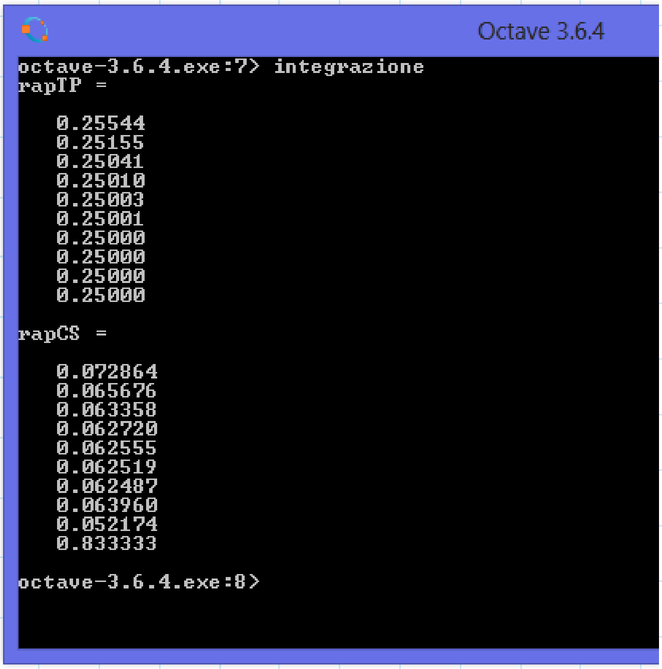
RISULTATI

```
function itp =tp(f,a,b,m)
%TP metodo dei trapezi composto
%  ITP = TP(F,A,B,M) calcola l'integrale
%  di f sull'intervallo [a,b] con la
%  formula dei trapezi composta usando m
%  intervalli

% vettore dei nodi equispaziati
xi = linspace(a,b,m+1);

% formula
h   = xi(2)-xi(1); % passo
itp = (h/2)*( f(xi(1)) + 2*sum( f(xi(2:end-1)) ) +f(xi(end)) );
```

```
function ics =cs(f,a,b,m)
%CS metodo di Cavalieri-Simpson composto
%  ICS = CS(F,A,B,M) calcola l'integrale
%  di f sull'intervallo [a,b] con la
%  formula di Cavalieri-Simpson composta
%  usando m intervalli

% definisco i nodi
xi = linspace(a,b,2*m+1);

% applico la formula
h   = (b-a)/(2*m);
fDisp = sum( f( xi(2:2:end-1) ) );
fPari = sum( f( xi(3:2:end-2) ) );
ics = (h/3)*( f(xi(1)) + 4*fDisp + 2*fPari + f(xi(end)) );
```

file cs.m





```
Octave 3.6.4
octave-3.6.4.exe:7> integrazione
rapTP =

   0.25544
   0.25155
   0.25041
   0.25010
   0.25003
   0.25001
   0.25000
   0.25000
   0.25000
   0.25000

rapCS =

   0.072864
   0.065676
   0.063358
   0.062720
   0.062555
   0.062519
   0.062487
   0.063960
   0.052174
   0.833333

octave-3.6.4.exe:8>
```

Notare che i rapporti degli errori sono come previsto dalla teoria perché $f(x)=\sqrt{x}$ ha

$$f''(x) = -\frac{1}{4\sqrt{x^3}}$$

che varia poco in $[a,b]=[1,2]$.

La situazione cambia se consideriamo $[a,b]=[0,1]$ perché in questo caso $f''(x)$ varia molto e, quindi, la teoria non garantisce più che il rapporto degli errori sia circa 1/4 per trapezi e circa 1/16 per Cavalieri-Simpson.

ESERCIZI

1) Ripetere, come visto in laboratorio, per $[a,b]=[0,1]$ e commentare i risultati.

2) Provare che nelle ipotesi di raddoppiare il numero di intervalli ed assumendo

$E_{T,c}^{(2m)} = 1$ $\qquad E_{CS,c}^{(2m)} \quad 1$

$$\frac{E^{(2m)}_{T,c}}{E^{(m)}_{T,c}} = \frac{1}{4}, \qquad \frac{E^{(2m)}_{cs,c}}{E^{(m)}_{cs,c}} = \frac{1}{16}$$

l'andamento di $E^{(m)}_{T,c}$ e di $E^{(2m)}_{cs,c}$ come funzioni di m in un grafico $\log_{10}$ $\log_{10}$ (ossia, riporto $\log_{10}\left(\left|E^{(m)}_{T,c}\right|\right)$ in funzione di $\log_{10}(m)$) ha un andamento rettilineo.

Suggerimento: è $m = 2^p$, $p = 0, 1, 2, 3, \dots$ e

$$E^{(m)}_{T,c} = \frac{1}{4} E^{(m/2)}_{T,c} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} E^{(m/4)}_{T,c} = \left(\frac{1}{4}\right)^2 E^{(m/4)}_{T,c} = \dots$$

$$\overset{m = 2^p}{=} \left(\frac{1}{4}\right)^p E^{(1)}_{T,c} = \frac{1}{2^{2p}} E^{(1)}_{T,c} = \frac{1}{(\underbrace{2^p}_{= m})^2} E^{(1)}_{T,c} =$$

$$= \frac{1}{m^2} E^{(1)}_{T,c}$$

da cui prendendo i logaritmi in base 10

$$\log_{10}\left|E^{(m)}_{T,c}\right| = -2 \log_{10}(m) + \log_{10}\left|E^{(1)}_{T,c}\right|$$

$$y = -2 \; x + q$$

che è una retta con pendenza -2.