Calcolo Numerico per Informatica – Appello – 13/06/2016

Tempo: 150 minuti

MATRICOLA	COGNOME	NOME

Esercizio 1 (**5 punti**) Si consideri il problema di valutare nel sistema floating point $\mathbb{F}(10, 2, -2, 2)$ la funzione

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

(a) (**0,5 punti**) Calcolare in $\mathbb{R}$ $f(50, 75)$.

(b) (**2,0 punti**) Dire, giustificando la risposta, se è possibile applicare la formula data per calcolare $f(50, 75)$ in $\mathbb{F}$. In caso affermativo, mostrare tutti i passaggi che portano al risultato finale.

(c) (**2,5 punti**) Proporre, se è il caso, una scrittura più stabile per valutare $f(50, 75)$ e mostrare tutti i passaggi che portano al risultato finale.

Usare la tecnica di arrotondamento e valutare la radice quadrata in $\mathbb{F}$ del numero α come $fl\left(\sqrt{\alpha}\right)$.

Esercizio 2 (**8 punti**) Si consideri il problema di approssimare la radice ξ di $f(x) = e^x + 2x$.

(a) (**1,5 punti**) Abbozzare un grafico qualitativo di f e mostrare che c'è una sola radice $\xi \in [a_0, b_0] = [-1, 0]$.

(b) (**1,5 punti**) Applicare il metodo di bisezione all'intervallo $[a_0, b_0]$ per trovare un nuovo intervallo di ampiezza 0.25 che contiene la radice.

(c) (**4 punti**) Sia ora $x_0 = 0$. Utilizzando il grafico di f, spiegare quale tipo di monotonia ci si aspetta dalla successione x_k generata dal metodo di Newton e calcolare le iterate x_1, x_2, x_3. Usare, nel modo più opportuno, queste iterate per ottenere una stima della costante asintotica dell'errore.

(d) (**1 punto**) Calcolare una stima del valore assoluto dell'errore $e_2 = \xi - x_2$.

Esercizio 3 (**4 punti**) La funzione f soddisfa alle condizioni $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$, $f(1) = 2$, $f(2) = -1$.

(a) (**2,5 punti**) Costruire la tabella delle differenze divise e scrivere il polinomio di interpolazione.

(b) (**1,5 punti**) Verificare che il polinomio passa per i punti indicati ed usarlo per stimare $f(1/2)$.

Esercizio 4 (**8 punti**) Si consideri il calcolo dell'integrale

$$I = \int_0^1 \left(1 - x^4\right)\, dx = \frac{4}{5}$$

(a) (**1,5 punti**) Determinare il numero m di intervalli del metodo di Cavalieri-Simpson composto che garantisce il calcolo dell'integrale $I_S^{(m)}$ con un valore assoluto dell'errore $E_S^{(m)} = I - I_S^{(m)}$ non superiore a $\epsilon = 10^{-6}$.

(b) (**3,5 punti**) Usando il metodo di Cavalieri-Simpson composto, calcolare due stime dell'integrale $I_S^{(1)}$ e $I_S^{(2)}$ con $m = 1$ e con $m = 2$ intervalli.

(c) (**2 punti**) Calcolare i valori assoluti dei corrispondenti errori $E_S^{(1)} = I - I_S^{(1)}$ e $E_S^{(2)} = I - I_S^{(2)}$ ed il loro rapporto. Commentare il risultato ottenuto.

(d) (**1 punto**) Indicare quanti intervalli sarebbero necessari al metodo dei trapezi composto per ottenere un risultato identico a $I_S^{(2)}$.

Esercizio 5 (**8 punti**) Si consideri il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ con

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & \alpha \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

(a) (**3 punti**) Scrivere la matrice di iterazione di Gauss-Seidel.

(b) (**3 punti**) Determinare per quali valori di α reale il metodo di Gauss-Seidel risulta convergente.

(c) (**1 punto**) Dire per quale α la convergenza del metodo di Gauss-Seidel risulta la più rapida.

(d) (**1 punto**) Posto $\alpha = -3/4$, fornire una stima del numero di iterazioni impiegate da Gauss-Seidel per avere $\|\mathbf{e}^{(k)}\| \leq 10^{-3} \cdot \|\mathbf{e}^{(0)}\|$.

Esercizio 6 (**3,0 punti**) Dato n, usando dei cicli, scrivere una function Matlab per calcolare

$$S = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$$

La funzione ha in ingresso n ed in uscita S. Dopo aver scritto il codice usando dei cicli, proporre, se possibile, anche una sola istruzione Matlab che esegue il compito richiesto.

Scrivere in modo chiaro ed ordinato. Tutte le risposte devono essere accuratamente giustificate alla luce della teoria svolta. Risposte corrette ma non adeguatamente giustificate non sono ritenute valide.
Eseguire le operazioni usando almeno 6 o 7 cifre decimali.