Università degli Studi di Verona Anno Accademico 2016-2017
CL in Matematica Applicata
Algebra

Foglio di Esercizi n°6 - 16/11/2016

(Da consegnare il giorno 23/11/2016)

Esercizio 1

(*5 punti*) Sia R un dominio d'integrità che gode della seguente proprietà: per ogni catena discendente di ideali di R

$$I_1 \supseteq I_2 \supseteq \cdots \supseteq I_k \supseteq \dots$$

esiste $N \in \mathbb{N}$ tale che, per ogni $n \geq N$, si ha $I_n = I_N$. Dimostrare che R è un campo.

Esercizio 2

Sia J l'ideale di $\mathbb{Z}[X]$ costituito da tutti i polinomi i cui coefficienti sono numeri interi divisibili per 7.

2) (*3 punti*) Dimostrare che gli anelli $\mathbb{Z}[X]/J$ e $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}[X]$ sono isomorfi.

4) (*2 punti*) L'ideale J è un ideale massimale di $\mathbb{Z}[X]$?

Esercizio 3

Nel campo complesso consideriamo l'elemento $\alpha = \sqrt{7} + i$.

1) (*3 punti*) Dimostrare che α è algebrico su $\mathbb{Q}$.

2) (*3 punti*) Dimostrare che $\mathbb{Q}(\alpha) = \mathbb{Q}(\sqrt{7}, i)$.

3) (*3 punti*) Determinare il polinomio minimo f di α su $\mathbb{Q}$.

4) (*3 punti*) Dire se $\mathbb{Q}(\alpha)$ è il campo di riducibilità completa E per f su $\mathbb{Q}$.

5) (*2 punti*) Determinare il grado di E su $\mathbb{Q}$.

Esercizio 4

Sia $K \subset F$ un'estensione finita di campi e sia R un anello tale che $K \subset R \subset F$.

1) (*2 punti*) Dimostrare che R è commutativo.

2) (*3 punti*) Sia r un elemento non nullo di R. Dimostrare che r è invertibile in R. [*Suggerimento: Considerare il polinomio minimo di r su K.*]

3) (*1 punto*) Concludere che R è un campo.