Prof. Lidia Angeleri, Dr. Jorge Vitória
Università di Verona, 2015/2016
Corso di Laurea in Matematica Applicata

Esercizi per il Corso di ALGEBRA

Foglio 5
3 Novembre 2015

1. Si consideri il sottogruppo moltiplicativo $Q_8 = \{\pm\mathbf{1}, \pm\mathbf{i}, \pm\mathbf{j}, \pm\mathbf{k}\}$ dei quaternioni invertibili $\mathbb{H}^*$.
   (a) **(3 punti)** Si dimostri che Q_8 non è isomorfo a D_4.
   (b) **(3 punti)** Si dimostri che ogni sottogrupo di Q_8 è normale.
   (b) **(4 punti)** Si dimostri che Q_8 è risolubile.
2. **(3 punti)** Si dimostri che nel gruppo moltiplicativo $\mathbb{Z}/2015\mathbb{Z}^*$ non esiste alcun elemento $\overline{x} \neq \overline{1}$ tale che $\overline{x}^{343} = \overline{1}$.
3. Siano $i = \sqrt{-1} \in \mathbb{C}$ e $R = \mathbb{Z}[i] := \{a + ib \,|\, a, b \in \mathbb{Z}\}$ l'insieme dei numeri *interi di Gauss*. Sia inoltre $\delta : R \to \mathbb{N}_0,\ x = a + ib \mapsto |\, x\,|^2 = a^2 + b^2$.
   (a) **(2 punti)** Si verifichi che R è un sottoanello di $\mathbb{C}$.
   (b) **(3 punti)** Per ogni $z \in \mathbb{C}$ si trovi $q \in \mathbb{Z}[i]$ tale che $|\, z - q\,|^2 \leq \frac{1}{2}$.
   (c) **(4 punti)** Si dimostri che (R, δ) è un anello euclideo.
   (d) **(3 punti)** Si determini l'insieme degli elementi invertibili R^*.
4. **(5 punti)** Si dimostri che $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}] = \{a + \sqrt{-5}b \,|\, a, b \in \mathbb{Z}\}$ è un dominio ma non è un dominio a fattorizzazione unica. (**Suggerimento:** Si trovino due fattorizzazioni diverse di 6 come prodotto di elementi **irriducibili** in $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$).

Consegna: martedí 10 novembre, 15:30, all'inizio delle esercitazioni.