TUTORAGGIO ANALISI 2
CORREZIONE SCRITTO DEL 10/7/2013

DOTT.SSA SILVIA SAONCELLA

Esercizio 1. Siano

$$f_A(x,y) := \begin{cases} (x^2+y^2)^3 \arctan\left(\dfrac{y}{x}\right), & \text{se } x \neq 0, \\ \\ y, & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

$$f_B(x,y) := \begin{cases} (x^2+y^2)^2 \arctan^3\left(\dfrac{y}{x}\right), & \text{se } x \neq 0, \\ \\ y^2, & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

(1) Studiare la continuità di f in $(0,0)$ giustificando ogni risposta.
(2) Definire la continuità di un campo scalare in un punto.

Soluzione. Osserviamo che se $\theta \neq \pi/2, 3/2\pi$ si ha:

$$|f_A(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)| \leq \rho^6 \underbrace{|\arctan(\tan\theta)|}_{\text{limitato}} \leq \frac{\pi}{2}\rho^6,$$

da cui, per $\rho > 0$ sufficientemente piccolo, si ottiene

$$|f_A(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)| \leq \rho.$$

Se invece $\theta = \pi/2, 3/2\pi$, si ha:

$$|f_A(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)| \leq \rho|\sin\theta| \leq \rho$$

Pertanto si ottiene, per $\rho > 0$ sufficientemente piccolo e per ogni $\theta \in [0, 2\pi]$:

$$|f_A(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)| \leq \rho.$$

Quindi per $(x,y) \to (0,0)$ si ha $\rho \to 0$ e $f_A(x,y) \to 0 = f_A(0,0)$. La funzione f_A è continua in $(0,0)$.

Osserviamo che se $\theta \neq \pi/2, 3/2\pi$ si ha:

$$|f_B(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)| \leq \rho^4 \underbrace{|\arctan^3(\tan\theta)|}_{\text{limitato}} \leq \frac{\pi^3}{8}\rho^4,$$

da cui, per $\rho > 0$ sufficientemente piccolo, si ottiene

$$|f_A(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)| \leq \rho^2.$$

Se invece $\theta = \pi/2, 3/2\pi$, si ha:

$$|f_A(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)| \leq \rho^2\sin^2\theta \leq \rho^2.$$

Pertanto si ottiene, per $\rho > 0$ sufficientemente piccolo e per ogni $\theta \in [0, 2\pi]$:

$$|f_A(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)| \leq \rho^2.$$

Quindi per $(x,y) \to (0,0)$ si ha $\rho \to 0$ e $f_B(x,y) \to 0 = f_B(0,0)$. La funzione f_B è continua in $(0,0)$.

In generale, se Ω è un aperto di $\mathbb{R}^n$, un campo scalare $f : \Omega \to \mathbb{R}$ è continuo in $(x_0, \ldots, x_n) \in \Omega$ se e solo se

$$\lim_{(y_0,\ldots,y_n)\to(x_0,\ldots,x_n)} f(y_0, \ldots, y_n) = f(x_0, \ldots, x_n).$$

Esercizio 2.

(A) Verificare che l'equazione
$$e^{x-y}+x^2-y^2=e(x+1)-1,$$
definisce implicitamente una funzione $y=y(x)$ in un intorno di $x=0$ con $y(0)=-1$. Disegnare il grafico in un intorno di $x=0$ e dimostrare che $x=0$ è punto di minimo relativo.

(B) Verificare che l'equazione
$$e^{x+y}+x^2-y^2=e(x+1)-1,$$
definisce implicitamente una funzione $y=y(x)$ in un intorno di $x=0$ con $y(0)=1$. Disegnare il grafico in un intorno di $x=0$ e dimostrare che $x=0$ è punto di massimo relativo.

Soluzione.

(A) Posto $F(x,y)=e^{x-y}+x^2-y^2-e(x+1)+1$, osserviamo che $F\in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ e
$$\nabla F(x,y)=\left(e^{x-y}+2x-e,-e^{x-y}-2y\right).$$
In particolare, si ha
$$\nabla F(0,-1)=(0,2-e).$$
Poiché $\partial_y F(0,1)\neq 0$, il Teorema di Dini permette di asserire l'esistenza di una funzione $y=y(x)$ di classe C^1 definita implicitamente da $F(x,y)=0$ in un intorno di 0 e con $y(0)=1$. Inoltre $\frac{d}{dx}y(x)=-\frac{\partial_x F(x,y(x))}{\partial_y F(x,y(x))}$, in particolare $\frac{d}{dx}y(0)=0$. Si ha inoltre:
$$\frac{d^2}{dx^2}y(x)=$$
$$=-\frac{\left(\partial^2_{xx}F(x,y(x))+\partial^2_{xy}F(x,y(x))\frac{d}{dx}y(x)\right)\partial_y F(x,y(x))-\partial_x F(x,y(x))\left(\partial^2_{yx}F(x,y(x))+\partial^2_{yy}F(x,y(x))\frac{d}{dx}y(x)\right)}{\left(\partial_y F(x,y(x))\right)^2}$$
Valutando per $x=0$, si ha
$$\frac{d^2}{dx^2}y(x)=-\frac{2+e}{2-e}>0,$$
quindi 0 è di massimo.

(B) Posto $F(x,y)=e^{x+y}+x^2-y^2-e(x+1)+1$, osserviamo che $F\in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ e
$$\nabla F(x,y)=\left(e^{x+y}+2x-e,e^{x+y}-2y\right).$$
In particolare, si ha
$$\nabla F(0,1)=(0,e-2).$$
Poiché $\partial_y F(0,1)\neq 0$, il Teorema di Dini permette di asserire l'esistenza di una funzione $y=y(x)$ di classe C^1 definita implicitamente da $F(x,y)=0$ in un intorno di 0 e con $y(0)=1$. Inoltre $\frac{d}{dx}y(x)=-\frac{\partial_x F(x,y(x))}{\partial_y F(x,y(x))}$, in particolare $\frac{d}{dx}y(0)=0$. Si ha inoltre:
$$\frac{d^2}{dx^2}y(x)=$$
$$=-\frac{\left(\partial^2_{xx}F(x,y(x))+\partial^2_{xy}F(x,y(x))\frac{d}{dx}y(x)\right)\partial_y F(x,y(x))-\partial_x F(x,y(x))\left(\partial^2_{yx}F(x,y(x))+\partial^2_{yy}F(x,y(x))\frac{d}{dx}y(x)\right)}{\left(\partial_y F(x,y(x))\right)^2}$$
Valutando per $x=0$, si ha
$$\frac{d^2}{dx^2}y(x)=-\frac{2+e}{e-2}<0,$$
quindi 0 è di massimo.

Esercizio 3.

(i) Enunciare il teorema relativo alla formula di Gauss-Green nel piano.

(ii) Usando la formula di Gauss-Green nel piano, calcolare l'area racchiusa dalle curve piane

$$(A): \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{25} = 1,$$
$$(B): \frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{9} = 1.$$

Soluzione. Sia γ una curva semplice del piano orientata con percorrenza in senso antiorario, delimitante la regione S, e siano f, g due funzioni di classe C^1 in un intorno di S. Allora:

$$\int_\gamma f(x,y)\,dx + g(x,y)\,dy = \iint_S (\partial_x g(x,y) - \partial_y f(x,y))\,dx\,dy$$

Parametrizziamo la curva (A) ponendo $x(\theta) = 2\cos\theta$, $y(\theta) = 5\sin\theta$. Poiché l'area è data dall'integrale su S di 1, possiamo scegliere $f(x,y) = 0$ e $g(x,y) = x$. In questo modo l'integranda del membro di sinistra è proprio 1. Si ha allora

$$\text{Area}(A) = \int_0^{2\pi} g(2\cos\theta, 5\sin\theta) \cdot 5\cos\theta\,d\theta = \int_0^{2\pi} 10\cos^2\theta = 10\pi.$$

Parametrizziamo la curva (B) ponendo $x(\theta) = 6\cos\theta$, $y(\theta) = 3\sin\theta$. Poiché l'area è data dall'integrale su S di 1, possiamo scegliere $f(x,y) = 0$ e $g(x,y) = x$. In questo modo l'integranda del membro di sinistra è proprio 1. Si ha allora

$$\text{Area}(B) = \int_0^{2\pi} g(6\cos\theta, 3\sin\theta) \cdot 3\cos\theta\,d\theta = \int_0^{2\pi} 18\cos^2\theta = 18\pi.$$